

MACRODINÂMICAS DE CRESCIMENTO EM UMA ECONOMIA SOLOW-SWAN COM MIGRAÇÃO: UMA ABORDAGEM DE JOGOS EVOLUCIONÁRIOS

Jaylson Jair da Silveira

UNESP

Seminário n° 7/2004 – 29/04/2004

São Paulo
2004

MACRODINÂMICAS DE CRESCIMENTO EM UMA ECONOMIA SOLOW-SWAN COM MIGRAÇÃO: UMA ABORDAGEM DE JOGOS EVOLUCIONÁRIOS

Jaylson Jair da Silveira*

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho toma como ponto de partida o modelo de crescimento econômico Solow-Swan e introduz em tal cenário o processo de migração que se desenrola num ambiente de racionalidade limitada. Essa análise é realizada considerando a migração como um jogo evolucionário, representado formalmente por uma dinâmica de replicação, obtida a partir da interpretação da migração como um processo que se desenrola num ambiente de racionalidade limitada.¹

Este texto está organizado como segue. Na próxima seção apresenta-se um modelo de crescimento Solow-Swan com migração desenvolvido por Barro e Sala-i-Martin (2001, cap. 9), o qual será utilizado como referência na avaliação dos resultados alcançados no modelo proposto no presente artigo. Na terceira seção deriva-se uma dinâmica de replicação que descreve o fluxo migratório entre a economia doméstica e o resto do mundo como uma dinâmica evolucionária do tipo "satisficing". Na quarta seção estuda-se as características qualitativas do processo que emerge da interação entre a dinâmica de replicação associada ao fluxo migratório e a equação fundamental de crescimento Solow-Swan. Na quinta seção faz-se uma análise qualitativa das propriedades de convergência de uma extensão do modelo básico desenvolvido na seção anterior. Em tal extensão é levado em consideração um "efeito congestionamento" que pode ser gerado pela migração, devido à existência de um fator de produção fixo na economia, que leva ao aparecimento de uma espécie de retornos decrescentes de escala. Nas considerações finais são resumidos os principais resultados do artigo.

* Departamento de Economia e Programa de Pós-Graduação em Economia, Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Araraquara. Endereço eletrônico: jaylson@fclar.unesp.br. Agradeço os comentários feitos pelos professores Alexandre Sartoris Neto e Renato Perim Colistete, do Programa de Pós-Graduação em Economia da UNESP, a uma versão prévia deste texto. Naturalmente, os erros remanescentes são de minha exclusiva responsabilidade.

¹ O presente artigo insere-se, do ponto de vista metodológico, num conjunto de trabalhos que tratam de questões clássicas dentro teoria econômica utilizando-se de uma abordagem da teoria dos jogos evolucionários. Entre tais trabalhos pode-se citar: Prado (1999); Prado (2001); Soromenho, Kadota e Prado (2001); Bonomo, Carrasco e Moreira (2003); Prado, Kadota e Soromenho (2003); Silveira (2003) e Silveira e Sanson (2003).

2. MACRODINÂMICA DE CRESCIMENTO SOLOW-SWAN COM MIGRAÇÃO: UM MODELO DE REFERÊNCIA

Como é bem conhecido, o modelo de crescimento Solow-Swan é construído como uma parábola de uma economia fechada que produz um único bem, que pode ser utilizado tanto como bem de consumo quanto como bem de capital. Em tal cenário é suposto que a poupança (S) é uma fração constante e exogenamente determinada $0 < s < 1$ da renda (Y), que toda a poupança é convertida automaticamente em investimento ($I = S$) e que a população (força de trabalho) cresce a uma taxa exógena constante $n > 0$. As possibilidades tecnológicas da economia são sintetizadas numa função de produção neoclássica bem comportada homogênea de grau um com progresso técnico exógeno do tipo Harrod-neutro:²

$$Y = F(K, \hat{L}), \text{ com } \frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial \hat{L}} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \text{ e } \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{L}^2} < 0 \quad (2.1)$$

para todo $K > 0$ e $\hat{L} > 0$, sendo $\hat{L} \equiv Le^{xt}$ a quantidade de trabalho em unidades de eficiência³ e $x > 0$ a taxa de progresso técnico aumentador de trabalho suposta constante e exogenamente determinada. Além disso, supõe-se que o estoque de capital apresenta uma taxa de depreciação exógena e constante $0 < \delta < 1$.

A partir de tais premissas pode-se deduzir a conhecida equação fundamental de crescimento Solow-Swan com progresso técnico Harrod-neutro:⁴

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + x)k, \quad (2.2)$$

sendo $k \equiv K / \hat{L}$ a razão capital-trabalho efetivo e $f(k) \equiv F(k, 1)$ a função de produção na forma intensiva em unidades de eficiência.

Barro e Sala-i-Martin (2001, cap. 9) incorporam a migração nesta versão padrão do modelo Solow-Swan. No restante desta seção apresenta-se tal extensão que será utilizada no presente artigo como um modelo de referência. Supondo que as populações da economia doméstica (L) e do resto do mundo crescem a mesma taxa constante $n > 0$, a taxa de variação da população doméstica pode ser expressa como segue:

² Será usada aqui basicamente a mesma notação de Barro e Sala-i-Martin (2001). Uma exceção importante diz respeito à razão capital-trabalho em unidades de eficiência, a qual estes autores associam o símbolo \hat{k} e aqui, por conveniência, será utilizado simplesmente k .

³ Daqui em diante onde for conveniente será utilizado o termo "efetivo" como sinônimo de "unidades de eficiência".

⁴ Como de praxe, um ponto sobre uma variável qualquer z indica sua taxa de variação instantânea com relação ao tempo t , isto é, $\dot{z} \equiv dz/dt$.

$$\dot{L} = nL + M, \quad (2.3)$$

na qual M é a migração líquida por unidade de tempo. Quando $M > 0$ a taxa de variação da força de trabalho doméstica supera a do resto do mundo, ou seja, a economia doméstica é uma receptora líquida de mão-de-obra. Quando $M < 0$ o oposto ocorre, de maneira que a economia torna-se uma fornecedora líquida de mão-de-obra.

Geralmente os migrantes não carregam consigo grande quantidade de capital físico, mas levam uma quantidade considerável de capital humano. Como em Barro e Sala-i-Martin (2001, p. 286-287), trabalhar-se-á com um conceito amplo de capital que incorpore estes dois tipos. Seja $\tilde{\kappa}$ a quantidade de capital que cada migrante carrega consigo. A variação no estoque de capital agregado da economia doméstica, portanto, passa a depender também do saldo migratório, isto é:

$$\dot{K} = sF(K, \hat{L}) - \delta K + \tilde{\kappa}M. \quad (2.4)$$

Utilizando (2.1), (2.3) e (2.4) a equação fundamental de crescimento Solow-Swan com migração pode ser escrita como segue:

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + x)k - (k - \kappa)m, \quad (2.5)$$

na qual κ é a quantidade de capital em unidades de eficiência que cada migrante carrega consigo e $m \equiv M/L$ o fluxo migratório líquido em unidades de população doméstica. Seguindo Barro e Sala-i-Martin (2001, p. 288) assumir-se-á que o resto do mundo encontra-se próximo ao estado estacionário de maneira que κ pode ser considerado constante.

Estes autores argumentam que o fluxo migratório líquido mantém uma relação positiva com o diferencial de salários reais efetivos entre a economia doméstica e o resto do mundo e postulam a seguinte função migração (Barro e Sala-i-Martin, 2001, p. 288):

$$m = m(k), \text{ com } m'(k) > 0 \text{ para todo } k > 0. \quad (2.6)$$

Suponha-se constante o salário do resto do mundo em um nível $\omega > 0$. Uma elevação da razão capital-trabalho efetivo da economia doméstica aumenta o seu salário real efetivo. Isto melhora, por sua vez, o diferencial de salários efetivos em favor da economia doméstica e, conseqüentemente, aumenta o saldo migratório líquido desta economia. Seja \tilde{k} o valor da razão capital-trabalho efetivo que torna nulo o saldo migratório líquido, ou seja, tal que

$m(\tilde{k})=0$.⁵ Para valores $k < \tilde{k}$ ($k > \tilde{k}$), portanto, a economia é um receptora (fornecedora) líquida de mão-de-obra.

Considerando a função migração (2.6) e a equação fundamental de crescimento Solow-Swan com migração (2.5), a equação diferencial que passa a governar a transição de estado da economia doméstica é:

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + x)k - (k - \kappa)m(k). \quad (2.7)$$

A existência e unicidade da trajetória de crescimento equilibrado pode ser demonstrada, como fizeram Barro e Sala-i-Martin (2001, p. 289-290), com base em um diagrama de crescimento reproduzido na Figura 1 adiante.

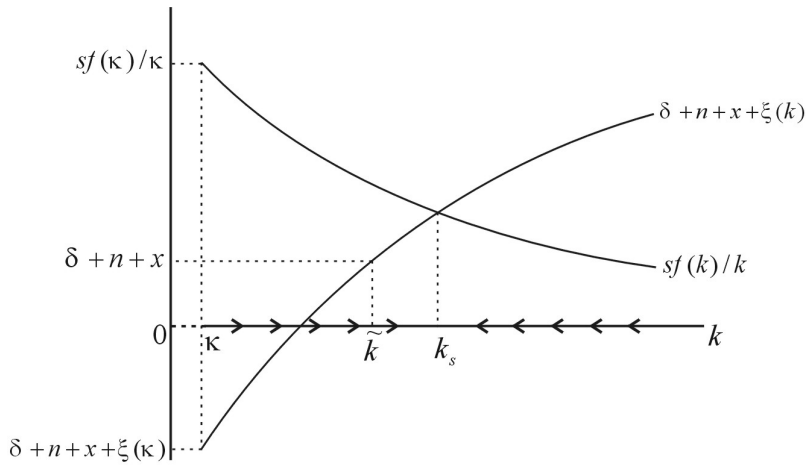


Figura 1. Diagrama de Crescimento do Modelo de Referência
Fonte: Barro e Sala-i-Martin (2001, p. 290). (Adaptada pelo autor).

Deste diagrama se pode extrair informações sobre o comportamento da taxa de crescimento da razão capital-trabalho efetivo, determinada a partir de (2.7):

$$\frac{\dot{k}}{k} = s \frac{f(k)}{k} - (\delta + n + x) - \xi(k), \quad (2.7-a)$$

na qual $\xi(k) \equiv [1 - (\kappa/k)]m(k)$.

A partir da hipótese sobre tecnologia (2.1) segue que o produto médio do capital $f(k)/k$ é uma função estritamente decrescente da razão capital-trabalho efetivo.⁶ Considerando as condições de Inada⁷ fica garantido que:

⁵ A existência de tal valor é suposta por Barro e Sala-i-Martin (2001, p. 288). Se \tilde{k} existe ele é único, pois

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} sf(k)/k = +\infty \text{ e } \lim_{k \rightarrow +\infty} sf(k)/k = 0. \quad (2.8)$$

A taxa de depreciação efetiva,⁸ $(\delta + n + x) + \xi(k)$, é uma função estritamente crescente da razão capital-trabalho efetivo, pois Barro e Sala-i-Martin (2001, p. 289) supõem que $k > \kappa$ e

$$\xi'(k) = \frac{\kappa}{k^2} m(k) + \left(1 - \frac{\kappa}{k}\right) m'(k) > 0 \text{ para qualquer } m(k). \quad (2.9)$$

Desde que $\tilde{k} > \kappa$ e $\tilde{k} < \infty$ segue que:

$$\lim_{k \rightarrow \kappa^+} [1 - (\kappa/k)]m(k) < 0 \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} [1 - (\kappa/k)]m(k) > 0. \quad (2.10)$$

A partir dos limites (2.8) e (2.10) e da continuidade de (2.7-a), infere-se pelo teorema do valor intermediário que existe um valor $k_s > \kappa$ tal que a taxa de crescimento da razão capital-trabalho efetivo é nula. Dado que a produtividade média do capital é uma função estritamente decrescente da razão capita-trabalho efetivo, a unicidade de k_s é decorrência direta da suposição (2.9).⁹

Nota-se que *a priori* existem três possíveis configurações do estado estacionário. Caso $k_s < \tilde{k}$ ter-se-á $m(k_s) < 0$ e, portanto, a economia doméstica será perpetuamente uma fornecedora líquida de mão-de-obra. Se $k_s > \tilde{k}$ (cf. Figura 1) ter-se-á $m(k_s) > 0$ e, portanto, a economia doméstica será uma receptora líquida de mão-de-obra em seu estado estacionário. Finalmente, caso $k_s = \tilde{k}$ a economia doméstica apresentará um saldo migratório nulo e sua população crescerá a mesma taxa que o resto do mundo. É importante frisar que neste modelo não se determina a distribuição da população mundial entre a economia doméstica e o resto do mundo.

A estabilidade assintótica da trajetória de crescimento equilibrado pode ser demonstrada utilizando-se novamente o diagrama de crescimento da Figura 1. Se $k < k_s$

$m'(k) > 0$ para todo $k > 0$.

$$^6 \frac{d}{dk} \frac{sf(k)}{k} = \frac{-s[f(k) - kf'(k)]}{k^2} < 0, \text{ pois } \frac{\partial F}{\partial \hat{L}} = f(k) - kf'(k) > 0 \text{ por hipótese.}$$

⁷ Que são $\lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{\hat{L} \rightarrow 0^+} \frac{\partial F}{\partial \hat{L}} = \infty$ e $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{\hat{L} \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial \hat{L}} = 0$. Estas condições implicam

$\lim_{k \rightarrow 0^+} f'(k) = +\infty$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$ (cf. Barro e Sala-i-Martin, 2001, p. 16-17).

⁸ Na qual já se encontra incorporado o efeito da migração sobre o estoque de capital doméstico.

($k > k_s$) a produtividade média do capital supera a (é superada pela) taxa de depreciação efetiva e, portanto, a razão capital-trabalho efetivo cresce (decrece). Enfim, se a razão capital-trabalho efetivo inicial difere da razão capital-trabalho efetivo do estado estacionário a economia converge assintoticamente para esta última.

Como destacam Barro e Sala-i-Martin (2001, p. 300) o modelo exposto nesta seção apresenta, entre outras deficiências, a determinação dos fluxos migratórios com base em uma função migração postulada. Há várias formas de prover microfundamentos para a função migração postulada em (2.6). O presente trabalho propõe derivá-la como uma dinâmica de replicação, deduzida a partir da hipótese de que quanto mais baixo é o salário efetivo numa economia maior a proporção de indivíduos insatisfeitos que migram para outras economias em busca de maiores salários.¹⁰ Cabe salientar que a função migração a ser derivada na próxima seção não terá como argumento apenas a razão capital-trabalho efetivo da economia doméstica, mas também a fração da população mundial que pertence a economia doméstica. Isto implica a consideração explícita da influência da distribuição da população mundial sobre o processo de acumulação de capital da economia doméstica.

3. A MIGRAÇÃO ENTRE A ECONOMIA DOMÉSTICA E O RESTO DO MUNDO COMO UMA DINÂMICA "SATISFICING"

Nesta seção deriva-se um modelo de jogo evolucionário que determina o fluxo migratório líquido da economia doméstica em cada instante do tempo supondo livre mobilidade de trabalho. Dividir-se-á, portanto, a população mundial em duas partes: uma delas a proporção ℓ da população mundial que trabalha na economia doméstica e a outra a proporção restante, $1 - \ell$, que trabalha no resto do mundo. Embora possa ocorrer heterogeneidade de salários efetivos entre a economia doméstica e o resto do mundo, supõe-se que há uniformidade de salários efetivos na economia doméstica, bem como no resto do mundo.

Considera-se que um trabalhador típico da economia doméstica ao receber seu salário efetivo $f(k) - kf'(k)$ o compara com um nível alvo \bar{w}_d que o satisfaria,¹¹ daqui em diante sinteticamente denominado "meta salarial". Se o salário efetivo ganho pelo trabalhador

⁹ Pois supondo (2.9) fica garantido que $\frac{d \dot{k}}{dk k} = \frac{-s[f(k) - kf'(k)]}{k^2} - \xi'(k) < 0$ para todo $k > \kappa$.

¹⁰ A função de migração a ser derivada na próxima seção poderia ser também derivada a partir da hipótese de que os custos de migração são uma variável não determinada deterministicamente, de maneira que os agentes não são capazes de avaliar qual o verdadeiro custo da migração antes de efetivarem as suas decisões de migrar

¹¹ Em Vega-Redondo (1996, p. 91) o nível de referência do *payoff* é denominado *target level of satisfaction*.

doméstico for igual ou superior a esta meta salarial ele não cogitaria emigrar. Entretanto, caso a meta salarial não seja alcançada o trabalhador doméstico torna-se um emigrante em potencial.¹² Analogamente, um trabalhador do resto do mundo que recebe um salário efetivo ω ao comparar com sua meta salarial \bar{w}_{rm} só se tornará um potencial imigrante para a economia doméstica caso seu salário efetivo seja inferior a sua meta salarial.

A meta salarial de um indivíduo qualquer depende, entre outras coisas, de características idiossincráticas como, por exemplo, o grau com que deseja melhorar seu padrão de vida ou ascender socialmente. Assumir-se-á que tal meta é determinada aleatoriamente de maneira independente entre os indivíduos e no tempo. Mais precisamente, supõe-se que as metas salariais, tanto da economia doméstica como do resto do mundo, sejam uniformemente distribuídas. Seja $f(\cdot)$ a função densidade de probabilidade uniforme, definida por:

$$f(\bar{w}_i) = \begin{cases} 1/2a, & \text{se } -a \leq \bar{w}_i \leq a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \text{ com } i = d, rm \quad (3.1)$$

e suporte $[-a, a]$, sendo $a = \max\{|f(k) - kf'(k) - \omega|, \forall k \in (\kappa, \bar{k}] \subset \Re\}$ o máximo diferencial de salários efetivos entre a economia doméstica e o resto do mundo e \bar{k} a maior razão capital-trabalho efetivo apresentada pela economia doméstica ao longo da sua trajetória de crescimento. Obtém-se, então, a seguinte função de distribuição acumulada:

$$F(w_i) = \int_{-a}^{w_i} \frac{1}{2a} dz = \frac{w_i + a}{2a}, \quad (3.2)$$

com $w_i = f(k) - kf'(k)$ na economia doméstica e $w_i = \omega$ no resto do mundo. A função (3.2) fornece a probabilidade de selecionar aleatoriamente um indivíduo da i -ésima economia cuja meta salarial (\bar{w}_i) seja menor ou igual ao salário efetivo vigente nesta economia (w_i). Portanto, a probabilidade de observar um indivíduo da i -ésima economia que recebeu um salário abaixo de sua meta salarial é dada por:

$$1 - F(w_i) = \frac{a - w_i}{2a}. \quad (3.3)$$

¹² A derivação de uma "satisficing dynamics" associada ao fluxo migratório exposta adiante segue as mesmas linhas da derivação de uma "satisficing dynamics" geral encontrada em Vega-Redondo (1996, p. 91).

Em outras palavras, com esta probabilidade encontra-se aleatoriamente um indivíduo da economia i não satisfeito com seu salário e que está revisando sua escolha relativa à região onde trabalhar.

A probabilidade de um emigrante de qualquer parte do resto do mundo escolher a economia doméstica em análise é suposta como sendo igual à fração da população mundial trabalhando na economia doméstica (ℓ).¹³ Logo, considerando (3.3), a imigração estimada para a economia doméstica em unidades de população mundial é:

$$\left(\frac{a - \omega}{2a} \right) \ell (1 - \ell) \quad (3.4)$$

Desde que a economia mundial está dividida em duas regiões, a probabilidade do emigrante da economia doméstica escolher qualquer outra economia para trabalhar coincide com a fração da população mundial que está trabalhando no resto do mundo ($1 - \ell$). Portanto, dada a probabilidade (3.3), a emigração da economia doméstica em unidades de população mundial é estimada em:

$$\left\{ \frac{a - [f(k) - kf'(k)]}{2a} \right\} (1 - \ell) \ell \quad (3.5)$$

Normalizando, sem perda de generalidade, a constante a em um, o saldo migratório líquido da economia doméstica ($\dot{\ell}$), obtido da diferença entre o influxo (3.4) e o efluxo (3.5), é expresso como:¹⁴

$$\dot{\ell} = \ell(1 - \ell)[f(k) - kf'(k) - \omega]. \quad (3.6)$$

Esta equação diferencial é uma *dinâmica de replicação*,¹⁵ que apresenta a propriedade de monotonicidade nos *payoffs*.¹⁶ Ou seja, a proporção com que a estratégia "trabalhar na economia doméstica" é adotada aumenta (diminui) se, e somente se, o *payoff* desta estratégia (o salário efetivo da economia doméstica) supera o (é superado pelo) *payoff* da estratégia "trabalhar no resto do mundo" (o salário efetivo do resto do mundo).

¹³ Esta formulação pode ser vista como representando um processo de imitação direta, no qual cada agente revisor adota a estratégia de um outro agente observado ao acaso (Weibull, 1995, cap. 4).

¹⁴ Seria possível apresentar uma derivação alternativa da dinâmica de replicação (3.6) baseada em custos de mudança aleatórios, que incluiria não só custos monetários explícitos mas também custos psicológicos gerados pela migração. Uma derivação nesta linha pode ser encontrada em Silveira e Sanson (2003, Apêndice 1).

¹⁵ Sobre tal dinâmica consulte Hofbauer e Sigmund (1998, cap. 7), Vega-Redondo (1996, cap. 3) e Weibull (1995, cap. 3).

¹⁶ Tal propriedade desempenha um papel na modelagem de um processo evolucionário num ambiente social análogo ao mecanismo de seleção natural.

Deduzida a dinâmica de replicação associada ao processo de migração, cabe estabelecer explicitamente a relação entre tal dinâmica e a função de migração postulada em (2.6). Para um dado instante inicial t_0 a população mundial encontra-se em um nível $N_0 > 0$. Como a população mundial cresce a uma taxa constante e exógena $n > 0$, a população mundial em um dado instante $t \geq t_0$ será:

$$N = N_0 e^{n(t-t_0)}. \quad (3.7)$$

Lembrando que L denota a população da economia doméstica no instante t , a fração da população mundial trabalhando na economia doméstica ou, equivalentemente, a população doméstica em unidades de população mundial no instante t é:

$$\ell = \frac{L}{N_0 e^{n(t-t_0)}}. \quad (3.8)$$

A partir de (3.8) infere-se que:

$$\frac{\dot{\ell}}{\ell} = \frac{\dot{L}}{L} - n, \quad (3.9)$$

então, considerando (2.3) e a definição $m \equiv M / L$, conclui-se que a taxa de crescimento da fração da população mundial residindo na economia doméstica é igual ao fluxo migratório líquido em unidades de população doméstica, ou seja:

$$\frac{\dot{\ell}}{\ell} = m. \quad (3.10)$$

Considerando a dinâmica de replicação (3.6) e a relação (3.10), fica demonstrado que a função migração (2.6) está sendo substituída por:

$$m = (1 - \ell)[f(k) - kf'(k) - \omega]. \quad (3.6-a)$$

Esta função migração é uma expressão do processo migratório com fundamentos microeconômicos oriundos de diferenças idiossincráticas entre as metas salariais dos trabalhadores. Como na função migração postulada em (2.6), na função migração (3.6-a) um aumento da razão capital-trabalho efetivo doméstica, ao elevar o salário real doméstico, aumenta o fluxo migratório líquido para uma dada distribuição da população mundial, pois:

$$\frac{d}{dk}[f(k) - kf'(k)] = -kf''(k) > 0 \text{ para todo } k > 0. \quad (3.11)$$

Além disso, observa-se que o nível do saldo migratório líquido depende do tamanho da população do resto do mundo e do diferencial de salários efetivos entre a economia doméstica e o resto do mundo.

O fluxo migratório líquido será nulo caso toda a população mundial seja completamente absorvida pela economia doméstica ($\ell = 1$) ou a razão capital-trabalho efetivo atinja o nível k_c , definido implicitamente por:

$$f(k_c) - k_c f'(k_c) - \omega = 0, \quad (3.12)$$

no qual o salário efetivo doméstico iguala-se ao salário efetivo do resto do mundo. Como será demonstrado nas duas próximas seções, o valor k_c exerce no modelo evolucionário aqui proposto o mesmo papel que o desempenhado pelo valor \tilde{k} no modelo de referência apresentado na seção anterior. Como Barro e Sala-i-Martin (2001, p. 288) fizeram com respeito ao valor \tilde{k} , será assumido que o valor k_c existe. Sua unicidade decorre de (3.11).

Finalmente, cabe salientar que Barro e Sala-i-Martin (2001, p. 288, nota 4) adotam a seguinte premissa com respeito à função migração (2.6): *assumimos que imigração e emigração não ocorrem simultaneamente, tal que migração líquida e bruta coincidam. Geralmente, a heterogeneidade do capital humano ou de outras variáveis poderia fazer com que fluxos brutos excedessem fluxos líquidos* (Tradução e grifos do autor). Na função migração (3.6-a), entretanto, há imigração e emigração simultaneamente na economia doméstica devido à heterogeneidade dos indivíduos com relação à meta salarial. Assim, a equalização entre os salários efetivos da economia doméstica e do resto do mundo, que torna o saldo migratório líquido nulo, significa simplesmente que influxo e efluxo de migrantes na economia doméstica se contrabalançam. Ou seja, mesmo com a igualação dos salários efetivos entre a economia doméstica e o resto do mundo há indivíduos nestas regiões que estão insatisfeitos com seus salários e migram em busca de melhores remunerações.

Em posse da dinâmica de replicação (3.6) e da nova função migração (3.6-a), o próximo passo é analisar as implicações da interação do processo migratório e a dinâmica de crescimento Solow-Swan numa economia aberta à migração.

4. A INTERAÇÃO ENTRE A DINÂMICA MIGRATÓRIA "SATISFICING" E A DINÂMICA DE CRESCIMENTO SOLOW-SWAN

Introduzindo (3.6-a) na equação fundamental de crescimento com migração (2.7) resulta uma equação de crescimento que junto à dinâmica de replicação (3.6) passam a determinar a trajetória de crescimento da economia doméstica:

$$\begin{aligned}\dot{k} &= sf(k) - (\delta + n + x)k - (1 - \ell)[f(k) - kf'(k) - \omega](k - \kappa), \\ \dot{\ell} &= \ell(1 - \ell)[f(k) - kf'(k) - \omega].\end{aligned}\quad (4.1)$$

O espaço de estado deste sistema é o conjunto $\Theta = \{(k, \ell) \in \mathfrak{R}_+^2 : 0 < \ell \leq 1 \text{ e } k > \kappa > 0\}$.

Se no estado estacionário houver um diferencial de salários efetivos entre a economia doméstica e o resto do mundo não nulo, ocorre um tipo extremo de distribuição da população mundial. Nesse último a população do resto do mundo é completamente absorvida pela economia doméstica ($\ell = 1$) e a razão capital-trabalho efetivo é igual à razão capital-trabalho efetivo estacionária Solow-Swan k_s , definida implicitamente pela conhecida condição:

$$sf(k_s) - (\delta + n + x)k_s = 0, \quad (4.2)$$

que torna a razão capital-trabalho efetivo doméstica estacionária.¹⁷ Do ponto de vista da teoria dos jogos evolucionários, esse estado estacionário pode ser caracterizado como um equilíbrio de estratégia pura, pois nele todos os indivíduos adotam a estratégia "trabalhar na economia doméstica".

Se no estado estacionário os salários reais efetivos da economia doméstica e do resto do mundo são iguais, há um saldo migratório nulo e um único valor da razão capital-trabalho efetivo k_c , definido implicitamente por (3.12), tal que a economia doméstica iguala o investimento *per capita* e a depreciação líquida, independentemente da distribuição da população mundial. Em outras palavras, há um *continuum* de pontos de equilíbrio $\{(k, \ell) \in \Theta \subset \mathfrak{R}_+^2 : k = k_s = k_c\}$ se no estado estacionário os salários reais efetivos da economia doméstica e do resto do mundo forem iguais. Com exceção do ponto $(k_c, 1)$ os demais pontos do *continuum* $\{(k, \ell) \in \Theta \subset \mathfrak{R}_+^2 : k = k_s = k_c\}$ são, do ponto de vista da teoria dos jogos evolucionários, equilíbrios de estratégia mista, já que existem tanto indivíduos que adotam a estratégia "trabalhar na economia doméstica" quanto indivíduos que optam pela estratégia "trabalhar no resto do mundo".

Os resultados sobre a existência de equilíbrios no sistema (4.1) expostos nos dois últimos parágrafos são sintetizados na proposição 1 adiante e demonstrados formalmente no Apêndice 1.

PROPOSIÇÃO 1. Sejam k_c e k_s valores definidos implicitamente por (3.12) e (4.2), respectivamente. Se $k_s \neq k_c$ então o sistema (4.1) apresenta, supondo $sf(\kappa) - (\delta + n + x)\kappa > 0$, um único estado de equilíbrio isolado $(k_s, 1) \in \Theta$. Se $k_s = k_c$ então existe um *continuum* de equilíbrios, ou seja, todos os pontos pertencentes ao subconjunto $\{(\ell, k) \in \Theta \subset \mathfrak{R}_+^2 : k = k_s = k_c\}$ são estados de equilíbrio do sistema (4.1).

PROVA: Apêndice 1.

As características qualitativas da dinâmica gerada pelo sistema (4.1) encontram-se sintetizadas nos diagramas de fase na Figura 2- Considerando a dinâmica de replicação (3.6), o fluxo migratório líquido é nulo em qualquer estado no qual a fração da população mundial trabalhando na economia doméstica seja igual a um. Além disso, qualquer estado caracterizado por uma razão capital-trabalho efetivo igual a k_c gera também um fluxo migratório líquido nulo, pois o salário efetivo doméstico se iguala ao salário efetivo do resto do mundo. Portanto, no *locus* na forma de um "T" definido pelo conjunto $\{(k, \ell) \in \Theta : \ell = 1\} \cup \{(k, \ell) \in \Theta : k = k_c\}$ tem-se $\dot{\ell} = 0$. Para estados nos quais $k > k_c$ o salário real efetivo doméstico é superior ao salário real efetivo do resto do mundo havendo, conseqüentemente, um saldo migratório líquido para a economia doméstica, ou seja, $\dot{\ell} > 0$. Se $k < k_c$ o oposto acontece, isto é, $\dot{\ell} < 0$.

A partir da primeira equação em (4.1) obtém-se a expressão que define a isocлина $\dot{k} = 0$, daqui em diante denominada curva de demarcação k :

$$\ell = 1 - \psi(k), \quad (4.3)$$

na qual

$$\psi(k) \equiv \frac{sf(k) - (\delta + n + x)k}{[f(k) - kf'(k) - \omega](k - \kappa)}, \quad (4.4)$$

definida em todo $k \in \Theta$ tal que $[f(k) - kf'(k) - \omega](k - \kappa) \neq 0$. Como, por hipótese, $k > \kappa$, a curva de demarcação k é definida para qualquer $k \neq k_c$.

¹⁷ Este estado estacionário é parametrizado pelo mesmo conjunto de variáveis exógenas que o estado estacionário do modelo Solow-Swan de uma economia fechada com progresso técnico Harrod-neutro. Além disso, os efeitos de tais variáveis exógenas sobre o estado estacionário são idênticos nos dois casos.

Para grafar a curva de demarcação k deve-se estabelecer previamente as posições relativas de k_c e k_s no eixo k do plano de fases. Suponha que no estado estacionário Solow-Swan a economia doméstica seja uma receptora líquida de mão-de-obra, ou seja, $k_s > k_c$ (cf. Figura 2-a). Considerando (4.3) e (4.4), para $k = k_s > k_c$ tem-se $\psi(k_s) = 0$ e, portanto, $\ell = 1$. A curva de demarcação k , como deveria ser, cruza a curva de demarcação ℓ (isocлина $\dot{\ell} = 0$) no estado estacionário com estratégia pura $(k_s, 1)$.

Supondo $0 < \ell \leq 1$ infere-se que a parte economicamente relevante da curva de demarcação k encontra-se na região $\{(k, \ell) \in \Theta : k_c < k \leq k_s\}$. Observando a equação diferencial associada à razão capital-trabalho efetivo em (4.1), vê-se que para qualquer $k \in (\kappa, k_c]$ o investimento *per capita* supera a taxa de depreciação líquida e, como o salário efetivo doméstico é menor ou igual ao salário efetivo do resto do mundo, o saldo migratório líquido negativo reforça este efeito do investimento, de modo que a razão capital-trabalho efetivo cresce, isto é, $\dot{k} > 0$. Exatamente o oposto acontece se $k \in (k_s, \infty)$, ou seja, $\dot{k} < 0$. Enfim, o subespaço de estados $\{(k, \ell) \in \Theta : k_c < k \leq k_s\}$ é onde a economia doméstica pode apresentar uma razão capital-trabalho efetivo estacionária ($\dot{k} = 0$).

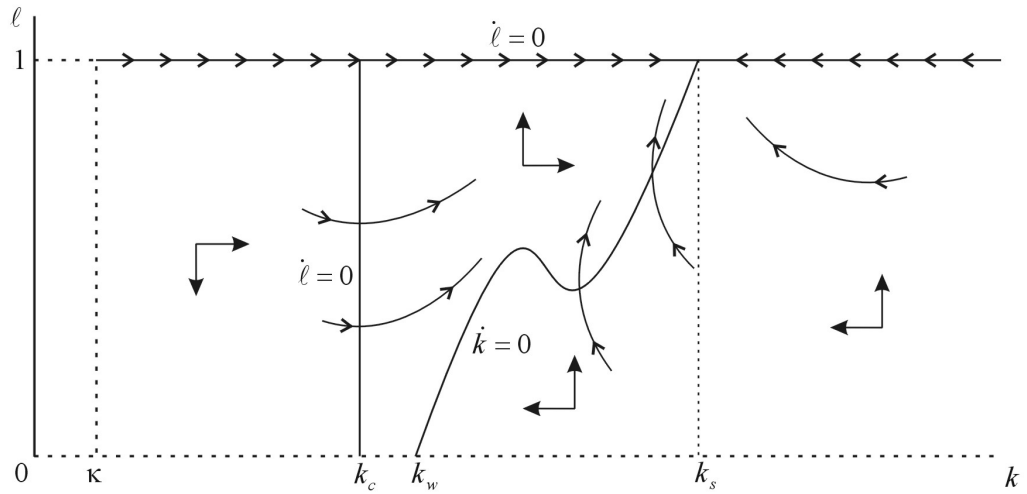
A inclinação da curva de demarcação k no subespaço $\{(k, \ell) \in \Theta : k_c < k \leq k_s\}$ é obtida derivando a função (4.3) com relação à razão capital-trabalho efetivo:

$$\left. \frac{\partial \ell}{\partial k} \right|_{\dot{k}=0} = -\psi'(k). \quad (4.5)$$

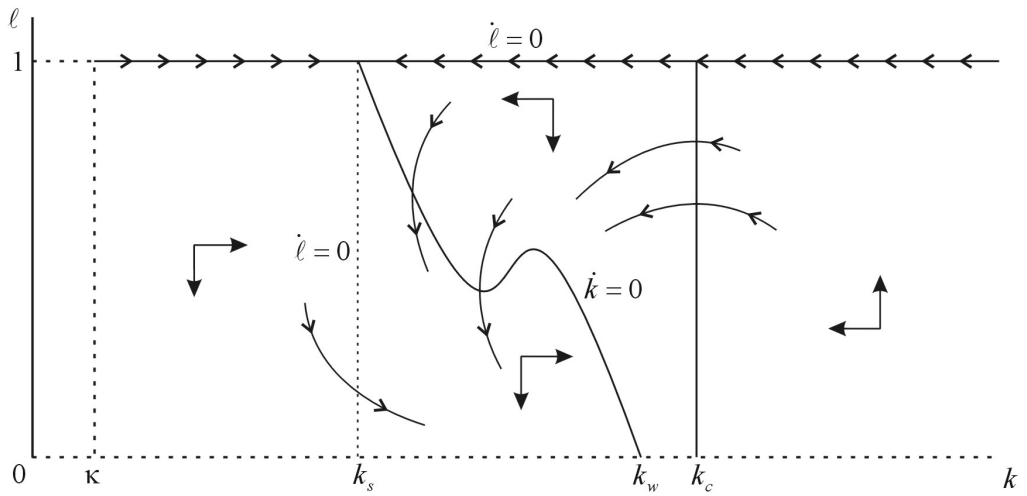
sendo:

$$\psi'(k) = \frac{[sf'(k) - (\delta + n + x)][f(k) - kf'(k) - \omega](k - \kappa) - [sf(k) - (\delta + n + x)k][f(k) - kf'(k) - \omega - kf''(k)(k - \kappa)]}{[f(k) - kf'(k) - \omega]^2 (k - \kappa)^2}.$$

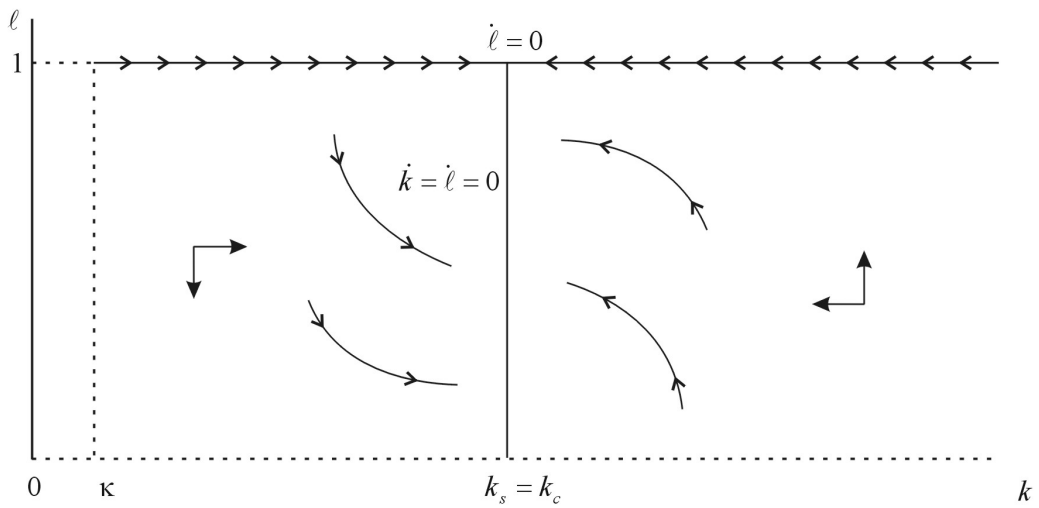
No intervalo (k_c, k_s) tem-se $f(k) - (\delta + n + x)k > 0$, $f(k) - kf'(k) - \omega > 0$, $f''(k) < 0$ e $k - \kappa > 0$, porém a expressão $sf'(k) - (\delta + n + x)$ apresenta sinal indeterminado. Logo, a função (4.5) pode não ser monotônica no intervalo (k_c, k_s) .



(a) Caso $k_s > k_c$



(b) Caso $k_s < k_c$



(c) Caso $k_s = k_c$

Figura 2. Macrodinâmicas de Crescimento

A função (4.4) apresenta o seguinte comportamento na fronteira do intervalo $(k_c, k_s]$:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow k_c^-} \psi(k) &= \left[\frac{sf(k_c) - (\delta + n + x)k_c}{(k_c - \kappa)} \right] \lim_{k \rightarrow k_c^-} \frac{1}{f(k) - kf'(k) - \omega} = \left[\frac{sf(k_c) - (\delta + n + x)k_c}{(k_c - \kappa)} \right] \cdot \infty = \infty, \\ \lim_{k \rightarrow k_s^-} \psi(k) &= \frac{\lim_{k \rightarrow k_s^-} sf(k) - (\delta + n + x)k}{[f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega](k_s - \kappa)} = \frac{0}{[f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega](k_s - \kappa)} = 0.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Pelo teorema do valor intermediário, então, infere-se que existe um k_w tal que $\psi(k_w) = 1$.

Suponha que k_w é único. Como

$$\psi'(k_s) = \frac{sf'(k_s) - (\delta + n + x)}{[f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega](k_s - \kappa)} < 0, \quad (4.7)$$

deve-se ter $\psi'(k) < 0$ em uma vizinhança em torno de k_w , pois do contrário k_w não seria único. Dessa forma, considerando (4.5), conclui-se que em uma vizinhança à direita de k_w a curva de demarcação k é positivamente inclinada. Em uma vizinhança suficientemente pequena de k_s a curva de demarcação k é também positivamente inclinada, pois por (4.5) e (4.7):

$$\lim_{k \rightarrow k_s^-} \frac{\partial \ell}{\partial k} \Big|_{k=0} = - \lim_{k \rightarrow k_s^-} \psi'(k) = - \frac{[sf'(k_s) - (\delta + n + x)]}{[f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega](k_s - \kappa)} > 0. \quad (4.8)$$

Portanto, a curva de demarcação k pode apresentar uma reversão de inclinação somente no interior do intervalo $(k_w, k_s]$, como ilustrado na Figura 2-a. Se isso ocorre ou não, dada a unicidade do ponto $(k_w, 0)$, é irrelevante para as conclusões qualitativas sobre a dinâmica do sistema que seguem.

Para se ter $0 < \ell \leq 1$ a função ψ deve obedecer as restrições $0 \leq \psi(k) < 1$. Desde que $sf(k) - (\delta + n + x)k \geq 0$, $f(k) - kf'(k) - \omega > 0$ e $k - \kappa > 0$ no intervalo $(k_c, k_s]$, a restrição anterior é satisfeita se para todo $k \in (k_c, k_s]$:

$$sf(k) - (\delta + n + x)k < [f(k) - kf'(k) - \omega](k - \kappa), \quad (4.9)$$

condição essa suposta válida daqui em diante.

No intervalo (k_c, k_s) tem-se:

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial \ell} = [f(k) - kf'(k) - \omega](k - \kappa) > 0, \quad (4.10)$$

o que indica que para uma dada razão capital-trabalho efetivo aumentos da fração de indivíduos residindo na economia doméstica gera uma expansão da taxa de variação da razão capital-trabalho efetivo. Pontos localizados na região $\{(k, \ell) \in \Theta : k_c < k \leq k_s\}$ e abaixo (acima) da curva de demarcação k , então, apresentam uma taxa de variação da razão capital-trabalho efetivo negativa (positiva). Isso completa a construção do diagrama de fase da Figura 2-a.

Na hipótese de que a economia doméstica seja uma fornecedora líquida de mão-de-obra no estado estacionário Solow-Swan, ou seja, $k_s < k_c$, uma análise análoga à realizada anteriormente (cf. Apêndice 2) permite concluir que o estado estacionário com estratégia pura $(k_s, 1)$ torna-se um repulsor e a economia doméstica tende à extinção.

Há ainda uma terceira possibilidade, a saber, a de que a economia doméstica apresente um saldo migratório líquido nulo, ou seja, que $k_c = k_s$. Neste caso a curva de demarcação k coincide com a curva de demarcação ℓ havendo, como já demonstrado, um *continuum* de equilíbrios que corresponde ao conjunto $\{(k, \ell) \in \Theta : k = k_s = k_c\}$. Assim, para qualquer razão capital-trabalho efetivo menor que a razão capital-trabalho efetivo Solow-Swan, a economia doméstica apresentará um saldo migratório líquido negativo ($\dot{\ell} < 0$) e um investimento *per capita* superior à depreciação líquida ($\dot{k} > 0$). Os respectivos sinais se invertem caso a razão capital-trabalho efetivo da economia doméstica seja maior que a razão capital-trabalho efetivo Solow-Swan (cf. Figura 2-c).

Em suma, se no estado estacionário Solow-Swan a economia doméstica é uma receptora líquida de força de trabalho tal economia absorverá toda a população mundial. Caso a economia doméstica seja uma fonte líquida de força de trabalho no estado estacionário Solow-Swan, então ela tende à extinção. Finalmente, se a economia doméstica apresentar um saldo migratório líquido nulo no estado estacionário Solow-Swan a distribuição da população mundial no estado estacionário dependerá do estado inicial da economia doméstica. A partir da análise qualitativa realizada anteriormente pode-se estabelecer a seguinte proposição concernente ao comportamento dinâmico do modelo:

PROPOSIÇÃO 2. Se no estado estacionário com estratégia pura $(k_s, 1) \in \Theta$ tem-se $f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega > 0$, então $(k_s, 1) \in \Theta$ é globalmente assintoticamente estável. Se $f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega < 0$, então $(k_s, 1) \in \Theta$ é instável, mais precisamente um ponto de sela cujo ramo estável é o *locus* $\{(k, \ell) \in \Theta : k \neq k_s \text{ e } \ell = 1\}$, e para qualquer condição inicial $(k_0, \ell_0) \in \text{int } \Theta$ tem-se $\ell \rightarrow 0^+$. Se $f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega = 0$, então a economia doméstica

converge para um dos estados estacionários com estratégia mista do subespaço $\{(k, \ell) \in \Theta : \ell < 1 \text{ e } k_c < k \leq k_s\}$, a depender da condição inicial $(k_0, \ell_0) \in \text{int } \Theta$.

PROVA: Apêndice 2.

Os resultados qualitativos relativos às dinâmicas do modelo enunciado na proposição anterior diferem dos resultados de livro-texto (cf. Barro e Sala-i-Martin, 2001, subseção 9.1.1). Em primeiro lugar, no modelo aqui proposto não pode haver coexistência da economia doméstica com o resto do mundo caso a primeira seja uma receptora ou fornecedora líquida de mão-de-obra, ou seja, a economia doméstica não pode ser uma "perpétua" fornecedora ou receptora de mão-de-obra. Em contraste, no modelo apresentado na segunda seção não aparece essa restrição, a economia doméstica pode ser uma fornecedora ou receptora líquida de mão-de-obra *ad infinitum*. Em segundo lugar, caso a economia doméstica seja representativa do resto do mundo, ou seja, apresente um saldo migratório líquido nulo devido à igualação dos salários reais efetivos, o tamanho relativo da economia doméstica depende das condições iniciais desta economia. Em outros termos, há um fenômeno de *path dependence*, ou seja, o tamanho relativo da população doméstica no estado estacionário depende da distribuição inicial da população mundial. No modelo de referência não se extraiu qualquer conclusão sobre o tamanho relativo da população doméstica. Em suma, com o modelo construído nesta seção são alcançados os mesmos resultados relativos à estabilidade assintótica do estado estacionário Solow-Swan com migração e, além disso, obtidos resultados adicionais sobre a distribuição relativa da população mundial.

A conclusão de que a economia doméstica pode ser indefinidamente uma fornecedora ou receptora líquida de mão-de-obra, no caso do modelo de referência, e se extinguir ou absorver toda a população mundial, no caso do modelo evolucionário aqui apresentado, não são resultados empiricamente razoáveis. Para resolver este problema de predição, Barro e Sala-i-Martin (2001, subseção 9.1.3), inspirados em Braun, introduzem uma forma de retornos decrescentes de escala na economia doméstica, supondo que um aumento da população congestiona um recurso disponível em quantidade fixa, tal como recursos naturais ou oferta de bens públicos. Com esta nova suposição, os resultados não condizentes com a evolução histórica das economias são eliminados no modelo de referência. Na próxima seção será avaliada tal hipótese de retornos decrescentes gerados pela migração é também capaz de eliminar as predições irrealistas do modelo evolucionário aqui desenvolvido.

5. A INTERAÇÃO ENTRE O PROCESSO MIGRATÓRIO E A DINÂMICA DE CRESCIMENTO NA PRESENÇA DE UM EFEITO CONGESTIONAMENTO

Segundo Braun (1993 *apud* Barro e Sala-i-Martin, 2001, p. 300) admite-se que a economia doméstica é dotada de um dado estoque fixo e exogenamente determinado de um fator de produção. Além disso, supõe-se que a dotação *per capita* deste recurso fixo afeta o produtividade dos fatores de produção utilizados pelas firmas da economia doméstica. Em termos formais, considera-se que as firmas domésticas defrontam-se com uma função de produção do tipo:

$$Y = F(K, \hat{L})(\bar{R}/L)^\lambda, \quad (5.1)$$

na qual $\bar{R} > 0$ é uma constante exógena, que representa o estoque fixo de um fator de produção, λ é uma constante exógena tal que $0 < \lambda < 1 - \alpha$ e $F(K, \hat{L})$ a função de produção neoclássica bem comportada especificada em (2.1). A função (5.1) pode ser expressa na forma intensiva em unidades de eficiência como segue:

$$f(k)(R/\ell)^\lambda, \quad (5.2)$$

na qual $f(k) \equiv F(k, 1)$ e $R \equiv \bar{R}/N$.

Será assumido, como fizeram Barro e Sala-i-Martin (2001, p. 302), que a taxa natural de crescimento da população mundial é nula ($n=0$). Com base nessa nova função de produção (5.2), o sistema (4.1) transforma-se em:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= sf(k)(R/\ell)^\lambda - (\delta + x)k - (1 - \ell)\{[f(k) - kf'(k)](R/\ell)^\lambda - \omega\}(k - \kappa), \\ \dot{\ell} &= \ell(1 - \ell)\{[f(k) - kf'(k)](R/\ell)^\lambda - \omega\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Esse novo sistema ainda tem como espaço de estados $\Theta = \{(k, \ell) \in \mathfrak{R}_+^2 : 0 < \ell \leq 1\}$.

Essa versão estendida do modelo apresenta apenas um estado estacionário com estratégia pura. Nesse a população do resto do mundo é completamente absorvida pela economia doméstica ($\ell = 1$) e a razão capital-trabalho efetivo é igual à razão capital-trabalho efetivo estacionária Solow-Swan \tilde{k}_s , agora definida implicitamente pela nova condição:

$$sf(\tilde{k}_s)R^\lambda - (\delta + x)\tilde{k}_s = 0, \quad (5.4)$$

que torna a razão capital-trabalho efetivo doméstica estacionária.

O sistema (5.3) apresenta, também, um único estado estacionário com estratégia mista. Neste estado estacionário existem tanto indivíduos optando pela estratégia "trabalhar na

economia doméstica" quanto indivíduos adotando a estratégia "trabalhar no resto do mundo". Tal equilíbrio, denotado por (k^*, ℓ^*) , é definido pelo seguinte conjunto de condições:¹⁸

$$\ell^* = \left\{ \frac{[f(k^*) - k^* f'(k^*)]R^\lambda}{\omega} \right\}^{1/\lambda}, \quad (5.5)$$

$$s \frac{f(k^*)}{k^*} - (\delta + x) \left[\frac{f(k^*) - k^* f'(k^*)}{\omega} \right] = 0. \quad (5.6)$$

A condição (5.5), obtida da segunda equação em (5.3), fornece o valor da fração de indivíduos da população mundial que estão adotando a estratégia "trabalhar na economia doméstica" que gera um salário efetivo doméstico igual ao salário efetivo do resto do mundo. A condição (5.6), obtida a partir de primeira equação em (5.3), define implicitamente a razão capital-trabalho efetivo tal que o investimento *per capita* iguala-se à taxa de depreciação efetiva quando o salário efetivo doméstico é igual ao salário efetivo do resto do mundo.

A proposição adiante sintetiza a argumentação apresentada nos parágrafos anteriores, explicitando formalmente as condições suficientes para existência dos estados estacionários de estratégia pura e mista.

PROPOSIÇÃO 3. Seja k_c o valor definido implicitamente por (3.12). Supondo $sf(\kappa)R^\lambda - (\delta + x)\kappa > 0$, existe um único equilíbrio de estratégia pura $(\tilde{k}_s, 1) \in \Theta$, sendo \tilde{k}_s definido implicitamente por (5.4). Além disso, há um único equilíbrio de estratégia mista $(k^*, \ell^*) \in \Theta$ definido pelas condições (5.5) e (5.6) se $[f(k^*) - k^* f'(k^*)]R^\lambda < \omega$.

PROVA: Apêndice 3.

A economia doméstica poderá absorver toda a população mundial caso ela se encontre suficientemente próxima do estado estacionário de estratégia pura e apresente um salário efetivo maior que o do resto do mundo. Em outras palavras, se a economia doméstica for uma receptora líquida de mão-de-obra no estado estacionário de estratégia pura tal estado é um atrator local do sistema econômico.

Entretanto, caso a economia seja uma fornecedora de mão-de-obra no estado estacionário de estratégia pura, por apresentar um salário efetivo inferior ao salário efetivo do resto do mundo, mesmo que se encontre suficientemente próxima a tal trajetória de crescimento equilibrado com extinção do resto do mundo, ela não convergirá para esta última. Em outros termos, sob a hipótese de que a economia doméstica seja uma fornecedora líquida

¹⁸ A derivação destas condições aparece no transcorrer da demonstração desenvolvida no Apêndice 3.

de emigrantes no estado estacionário de estratégia pura tal estado torna-se um repulsor local do sistema econômico.

Independentemente da posição da economia doméstica, no que diz respeito ao saldo migratório líquido,¹⁹ o estado estacionário com estratégia mista será um atrator local do sistema econômico. Ou seja, se a economia doméstica encontrar-se suficientemente próxima da trajetória de crescimento equilibrado com estratégia mista ela convergirá para esta última. Segue uma síntese dos resultados de convergência discutidos até aqui.

PROPOSIÇÃO 4. Se no estado estacionário com estratégia pura $f(\tilde{k}_s) - \tilde{k}_s f'(\tilde{k}_s)]R^\lambda - \omega > 0$ então $(\tilde{k}_s, 1) \in \Theta$ será localmente assintoticamente estável. Se $f(\tilde{k}_s) - \tilde{k}_s f'(\tilde{k}_s)]R^\lambda - \omega < 0$ então o ponto de equilíbrio $(\tilde{k}_s, 1) \in \Theta$ será localmente instável, mais precisamente um ponto de sela cujo ramo estável será o *locus* $\{(k, \ell) \in \Theta : k \neq \tilde{k}_s \text{ e } \ell = 1\}$. O estado estacionário com estratégia mista $(k^*, \ell^*) \in \Theta$ é localmente assintoticamente estável.

PROVA: Apêndice 4.

Quando a economia doméstica na vizinhança do estado estacionário com estratégia pura apresenta um salário efetivo maior que o salário efetivo do resto do mundo, o sistema econômico apresenta duas bases locais de atração: uma em torno do estado estacionário com estratégia pura e outra em torno do estado estacionário com estratégia mista. Mais uma vez aparece no modelo a propriedade de *path dependence*, ou seja, a depender do estado inicial da economia doméstica ela poderá convergir para uma ou outra destas trajetórias de crescimento equilibrado.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentou-se um modelo de crescimento econômico do tipo Solow-Swan com migração. O fluxo migratório foi modelado como um jogo evolucionário, mais precisamente como uma dinâmica de replicação, a partir da hipótese de que os trabalhadores apresentam diferenças idiossincráticas com respeito as suas metas salariais.

Os resultados alcançados em parte corroboram os obtidos na abordagem tradicional. Ou seja, as características de longo prazo da economia doméstica dependem fundamentalmente do seu saldo migratório líquido no estado estacionário. Todavia, novos resultados foram obtidos. Na versão sem efeito congestionamento do modelo evolucionário a economia doméstica converge para o estado estacionário se absorver completamente o

população do resto do mundo, o que acontece se ela apresentar nesse estado um salário efetivo superior ao do resto do mundo. Se a economia doméstica em seu estado estacionário apresentar um salário efetivo inferior ao do resto do mundo, toda sua população acabará emigrando para esse último. O modelo evolucionário sem efeito congestionamento, portanto, põe em evidência a impossibilidade de existência da economia doméstica como um sistema distinto do resto do mundo, deduzida no modelo de referência sem efeito congestionamento. Em outras palavras, o modelo evolucionário sem congestionamento torna explícita, diferentemente do modelo de referência sem congestionamento, a impossibilidade da economia doméstica trilhar sua trajetória de crescimento equilibrado como uma perpétua receptora ou fornecedora líquida de mão-de-obra.

No modelo de referência sem congestionamento infere-se a coexistência da economia doméstica e do resto do mundo somente se ocorrer a homogeneização dos salários efetivos entre essas duas regiões, quando a economia doméstica encontrar-se em seu estado estacionário. Essa mesma conclusão é extraída do modelo evolucionário sem congestionamento. Todavia, do modelo evolucionário é inferido um resultado adicional, a saber, o tamanho relativo da população da economia doméstica depende das condições iniciais dessa última.

A possibilidade de extinção da economia doméstica ou do resto do mundo não é sustentada pelos fatos. Uma das causas desta predição é encontrada na hipótese implícita de que o crescimento (declínio) populacional acelerado pela imigração (emigração) não acarreta um congestionamento (descongestionamento) dos fatores/recursos fixos da economia doméstica. A incorporação do efeito congestionamento ao modelo evolucionário não exclui a possibilidade de fusão da economia doméstica e do resto do mundo em uma única economia, caso a economia doméstica apresente um diferencial de salários efetivos atrativo em seu estado estacionário. Entretanto, a introdução do efeito congestionamento trouxe à tona a possibilidade de convergência para um estado estacionário com a existência simultânea da economia doméstica e do resto do mundo.

Uma comparação mais precisa entre as predições do modelo de referência e o modelo evolucionário poderia ser alcançada através da comparação das propriedades de convergência desse último com as respectivas propriedades de convergência do modelo de referência. Para finalizar, cabe destacar a possibilidade de uma outra extensão do presente trabalho, a saber, o estudo da dinâmica resultante do acoplamento da dinâmica replicadora aqui derivada e do

¹⁹ Fornecedora ou receptora líquida de mão-de-obra.

modelo de Ramsey com migração. Esta seria uma maneira de testar a robustez dos resultados obtidos no presente trabalho quando a poupança passa a ser uma variável endógena.

APÊNDICE 1: PROVA DA PROPOSIÇÃO 1

Um estado de equilíbrio do sistema (4.1) é a solução do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} sf(k) - (\delta + n + x)k - (1 - \ell)[f(k) - kf'(k) - \omega](k - \kappa) &= 0, \\ \ell(1 - \ell)[f(k) - kf'(k) - \omega] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Considerando a segunda equação do sistema (A.1) conclui-se que esta é satisfeita se $\ell = 1$ ou $f(k) - kf'(k) - \omega = 0$. Na presente demonstração parte-se da premissa de que existe uma razão capital-trabalho efetivo k_c , definida implicitamente por (3.12), tal que o fluxo migratório líquido é nulo. Dada a existência de k_c sua unicidade é consequência do fato de que $\frac{d}{dk}[f(k) - kf'(k)] = -kf''(k) > 0$, devido à premissa de rendimentos físicos marginais decrescentes e mercado de trabalho perfeitamente competitivo.

Existência do ponto de equilíbrio $(k_s, 1) \in \Theta$:

Se $\ell = 1$ então a primeira equação de (A.1) reduz-se a:

$$sf(k) - (\delta + n + x)k = 0, \quad (\text{A.2})$$

a qual pode ser transformada para $k > \kappa > 0$ em:

$$\frac{sf(k)}{k} - (\delta + n + x) = 0. \quad (\text{A.2-a})$$

Portanto, basta prova que existe um valor $k_s > \kappa > 0$ tal que (A.2-a) é satisfeita. Usando a regra de L'Hôpital e o fato de que $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$ (uma das condições de Inada) infere-se que

$\lim_{k \rightarrow +\infty} [sf(k)/k] = 0$ e, portanto:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\frac{sf(k)}{k} - (\delta + n + x) \right] = -(\delta + n + x) < 0. \quad (\text{A.3})$$

Como, por hipótese:

$$\frac{sf(\kappa)}{\kappa} - (\delta + n + x) > 0 \quad (\text{A.4})$$

e $f(k)$ é contínua em qualquer $k \geq 0$ infere-se, baseado no teorema do valor intermediário, que existe um $k_s > \kappa > 0$ tal que (A.2-a) é satisfeita.

Unicidade do ponto de equilíbrio $(k_s, 1) \in \Theta$:

Desde que a produtividade física marginal do trabalho é estritamente positiva, isto é, $f(k) - kf'(k) > 0$ então:

$$\frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{sf(k)}{k} - (\delta + n + x) \right] = -\frac{s[f(k) - kf'(k)]}{k^2} < 0 \quad (\text{A.5})$$

e, portanto, o lado esquerdo de (A.2-a) é uma função estritamente decrescente de k . Logo, k_s é único.

Existência de um continuum de equilíbrios:

Para que $f(k) - kf'(k) - \omega = 0$ deve-se ter, considerando (3.12), $k = k_c$. Se $f(k) - kf'(k) - \omega = 0$, então a primeira equação de (A.1) reduz-se a:

$$sf(k) - (\delta + n + x)k = 0. \quad (\text{A.6})$$

Esta última equação é satisfeita se, e somente se, $k = k_s$. Logo, a única maneira de ambas as condições serem satisfeitas é ter-se $k_s = k_c$. Se isto acontecer a solução do sistema (A.1) independe do valor que a variável ℓ assume em Θ . Portanto, todos os pontos pertencentes ao conjunto $\{(k, \ell) \in \Theta : k = k_s = k_c\}$ são pontos de equilíbrio do sistema (4.1). ;

APÊNDICE 2: PROVA DA PROPOSIÇÃO 2

PARTE 1: O equilíbrio $(k_s, 1)$ é globalmente assintoticamente estável se $f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega > 0$.

A construção do diagrama de fases deste caso foi realizada na seção quatro. A análise dos autovalores da matriz Jacobiana da linearização em torno do estado estacionário $(k_s, 1)$ está de acordo com as conclusões qualitativas globais obtidas. A matriz Jacobiana da linearização em torno do estado estacionário $(k_s, 1)$ é dada por:

$$J(1, k_s) = \begin{bmatrix} sf'(k_s) - (\delta + n + x) & | & (f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega)(k_s - \kappa) \\ \hline 0 & | & -(f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

cujos autovalores são:

$$\lambda_1 = sf'(k_s) - (\delta + n + x) < 0 \text{ e } \lambda_2 = -[f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega]. \quad (\text{A.8})$$

O segundo autovalor é negativo se $k_s > k_c$. De (A.8) infere-se, então, que o estado estacionário $(k_s, 1)$ é um sorvedouro da linearização em sua vizinhança quando $k_s > k_c$, pois todos os autovalores associados possuem partes reais negativas. Assim, com base no teorema

de Hartman-Grobman, conclui-se que o estado estacionário $(k_s, 1)$ é um atrator local se $k_s > k_c$ (cf. Figura 2-a).

PARTE 2: O equilíbrio $(k_s, 1) \in \Theta$ é instável se $f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega < 0$ e $\ell \rightarrow 0^+$ se $(\ell_0, k_0) \in \text{int}\Theta$.

Posicionamento da curva de demarcação k no plano de fases:

Suponha $k_s < k_c$ (cf. Figura 2-b). Considerando (4.3) e (4.4), para $k = k_s < k_c$ tem-se $\psi(k_s) = 0$ e, portanto, $\ell = 1$. Logo, o ponto $(k_s, 1)$ pertence à curva de demarcação k . Suponha $0 < \ell \leq 1$. Para qualquer $k \in (\kappa, k_s]$ tem-se $sf(k) - (\delta + n + x)k > 0$ e $f(k) - kf'(k) - \omega < 0$, logo $\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + x)k - (1 - \ell)[f(k) - kf'(k) - \omega](k - \kappa) > 0$. Para qualquer $k \in (k_s, \infty)$ tem-se $sf(k) - (\delta + n + x)k < 0$ e $f(k) - kf'(k) - \omega > 0$, logo $\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + x)k - (1 - \ell)[f(k) - kf'(k) - \omega](k - \kappa) < 0$. Portanto, a curva de demarcação k é um subconjunto do subespaço $\{(k, \ell) \in \Theta : k_c < k \leq k_s\}$.

Inclinação da curva de demarcação k :

A inclinação da curva de demarcação k no subespaço $\{(k, \ell) \in \Theta : k_c < k \leq k_s\}$ é dada por (4.5). No intervalo (k_s, k_c) tem-se $f(k) - (\delta + n + x)k < 0$, $f(k) - kf'(k) - \omega < 0$, $f''(k) < 0$ e $k - \kappa > 0$, porém a expressão $sf'(k) - (\delta + n + x)$ apresenta sinal indeterminado. Logo, a função (4.5) pode não ser monotônica no intervalo (k_s, k_c) . A função (4.4) apresenta o seguinte comportamento na fronteira do intervalo $[k_s, k_c)$:

$$\lim_{k \rightarrow k_s^+} \psi(k) = \frac{\lim_{k \rightarrow k_s^+} sf(k) - (\delta + n + x)k}{[f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega](k_s - \kappa)} = \frac{0}{[f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega](k_s - \kappa)} = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow k_c^-} \psi(k) = \left[\frac{sf(k_c) - (\delta + n + x)k_c}{(k_c - \kappa)} \right] \lim_{k \rightarrow k_c^-} \frac{1}{f(k) - kf'(k) - \omega} = \left[\frac{sf(k_c) - (\delta + n + x)k_c}{(k_c - \kappa)} \right] \cdot (-\infty) = \infty \quad (\text{A.9})$$

Pelo teorema do valor intermediário, então, infere-se que existe um k_w tal que $\psi(k_w) = 1$.

Suponha que k_w é único. Como $k_s < k_c$ então:

$$\psi'(k_s) = \frac{sf'(k_s) - (\delta + n + x)}{[f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega](k_s - \kappa)} > 0. \quad (\text{A.10})$$

Portanto, deve-se ter $\psi'(k) > 0$ em todo $k \in (k_w - \varepsilon, k_w)$ para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, pois do contrário k_w não seria único. Dessa forma, considerando (4.5), conclui-se que:

$$\left. \frac{\partial \ell}{\partial k} \right|_{\dot{k}=0} = -\psi'(k) < 0 \text{ para } k \in (k_w - \varepsilon, k_w).$$

Em uma vizinhança suficientemente pequena de k_s a curva de demarcação k é também positivamente inclinada, pois por (4.5) e (4.7):

$$\lim_{k \rightarrow k_s^+} \left. \frac{\partial \ell}{\partial k} \right|_{\dot{k}=0} = -\lim_{k \rightarrow k_s^+} \psi'(k) = -\frac{[sf'(k_s) - (\delta + n + x)]}{[f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega](k_s - \kappa)} < 0, \quad (\text{A.11})$$

já que $k_s < k_c$. Portanto, a curva de demarcação k pode apresentar uma reversão de inclinação somente no interior do intervalo $[k_s, k_w)$, como ilustrado na Figura 2-b. Se isso ocorre ou não, dada a unicidade do ponto $(k_w, 0)$, é irrelevante para as conclusões qualitativas sobre a dinâmica do sistema.

Determinação da configuração das linhas direcionais do campo vetorial:

No intervalo (k_s, k_c) tem-se:

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial \ell} = [f(k) - kf'(k) - \omega](k - \kappa) < 0, \quad (\text{A.12})$$

portanto pontos localizados na região $\{(k, \ell) \in \Theta : k_s < k \leq k_c\}$ e abaixo (acima) da curva de demarcação k apresentam $\dot{k} < 0$ ($\dot{k} > 0$). Isso completa a construção do diagrama de fase da Figura 2-b.

Análise de estabilidade local via linearização:

Considerando (A.7) e (A.8) infere-se que o estado estacionário $(k_s, 1)$ é um ponto de sela da linearização em sua vizinhança quando $k_s < k_c$, já que os autovalores associados possuem partes reais com sinais opostos. Assim, com base no teorema de Hartman-Grobman, conclui-se que o estado estacionário $(k_s, 1)$ é um ponto de sela local se $k_s < k_c$ (cf. Figura 2-b).

PARTE 3: O subespaço $\{(k, \ell) \in \Theta : \ell < 1 \text{ e } k_c < k \leq k_s\}$ é um atrator global se $f(k_s) - k_s f'(k_s) - \omega = 0$

Suponha $k_s = k_c$. Neste caso, considerando a primeira equação em (4.1), a isoclina $\dot{k} = 0$ é o locus $\{(k, \ell) \in \Theta : k = k_s = k_c\}$. Assim, para qualquer $k < k_s = k_c$ tem-se $sf(k) - (\delta + n + x)k > 0$ e $f(k) - kf'(k) - \omega < 0$, logo $\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + x)k - (1 - \ell)[f(k) - kf'(k) - \omega](k - \kappa) > 0$ e $\dot{\ell} = \ell(1 - \ell)[f(k) - kf'(k) - \omega] < 0$. Para qualquer $k > k_s = k_c$ tem-se $sf(k) - (\delta + n + x)k < 0$ e $f(k) - kf'(k) - \omega > 0$, então $\dot{k} = sf(k) - (\delta + n + x)k - (1 - \ell)[f(k) - kf'(k) - \omega](k - \kappa) < 0$ e $\dot{\ell} = \ell(1 - \ell)[f(k) - kf'(k) - \omega] > 0$. Essa combinação das setas direcionais (cf. Figura 2-c) demonstra que o subespaço $\{(k, \ell) \in \Theta : \ell < 1 \text{ e } k_c < k \leq k_s\}$ é um atrator global. ;

APÊNDICE 3: PROVA DA PROPOSIÇÃO 3

Um estado de equilíbrio de (5.3) é a solução do seguinte sistema:

$$\begin{aligned} sf(k)(R/\ell)^\lambda - (\delta + x)k - (1 - \ell)\{[f(k) - kf'(k)](R/\ell)^\lambda - \omega\}(k - \kappa) &= 0, \\ \ell(1 - \ell)\{[f(k) - kf'(k)](R/\ell)^\lambda - \omega\} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Desde que $\ell > 0$ infere-se que a segunda equação do sistema (A.13) é satisfeita se $\ell = 1$ ou $[f(k) - kf'(k)](\bar{R}/\ell)^\lambda - \omega = 0$.

Existência do ponto de equilíbrio de estratégia pura $(\tilde{k}_s, 0)$:

Se $\ell = 1$ então a primeira equação em (A.13) reduz-se a:

$$sf(k)R^\lambda - (\delta + x)k = 0, \quad (\text{A.14})$$

a qual pode ser transformada para $k > \kappa > 0$ em:

$$\frac{sf(k)R^\lambda}{k} - (\delta + x) = 0. \quad (\text{A.14-a})$$

Portanto, basta prova que existe um valor $\tilde{k}_s > \kappa > 0$ tal que (A.14-a) é satisfeita. Usando a regra de L'Hôpital e o fato de que $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$ (uma das condições de Inada) infere-se que

$\lim_{k \rightarrow +\infty} [sf(k)R^\lambda / k] = 0$ e, portanto:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\frac{sf(k)R^\lambda}{k} - (\delta + x) \right] = -(\delta + x) < 0. \quad (\text{A.15})$$

Como, por hipótese:

$$\frac{sf(\kappa)R^\lambda}{\kappa} - (\delta + x) > 0 \quad (\text{A.16})$$

e $f(k)$ é contínua em qualquer $k \geq 0$ infere-se, baseado no teorema do valor intermediário, que existe um $\tilde{k}_s > \kappa > 0$ tal que (A.14-a) é satisfeita.

Unicidade do ponto de equilíbrio de estratégia pura $(\tilde{k}_s, 0)$:

Desde que a produtividade física marginal do trabalho é estritamente positiva, isto é, $[f(k) - kf'(k)](R/\ell)^\lambda > 0$ então:

$$\frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{sf(k)R^\lambda}{k} - (\delta + x) \right] = -\frac{sR^\lambda [f(k) - kf'(k)]}{k^2} < 0 \quad (\text{A.17})$$

e, portanto, o lado esquerdo de (A.14-a) é uma função estritamente decrescente de k . Logo, \tilde{k}_s é único.

Existência do ponto de equilíbrio de estratégia mista (k^, ℓ^*) :*

Se $0 < \ell < 1$ então a segunda equação de (A.13) é satisfeita se, e somente se, $[f(k) - kf'(k)](R/\ell)^\lambda - \omega = 0$. Supondo $f(k) - kf'(k) \neq 0$ pode-se escrever:

$$\ell = R \left[\frac{f(k) - kf'(k)}{\omega} \right]^{1/\lambda}. \quad (\text{A.18})$$

Introduzindo esta na primeira equação em (A.13) resulta:

$$\mu(k) \equiv s \frac{f(k)}{k} - (\delta + x) \left[\frac{f(k) - kf'(k)}{\omega} \right] = 0. \quad (\text{A.19})$$

Portanto, basta provar que existe um valor $k^* > \kappa > 0$ tal que (A.19) é satisfeita. Seja k_c o valor definido implicitamente por (3.12). Desde que $k_c > \kappa > 0$ sabe-se que:

$$\lim_{k \rightarrow k_c^+} \mu(k) = \frac{sf(k_c)}{k_c} > 0. \quad (\text{A.20})$$

Usando a regra de L'Hôpital e o fato de que $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$ (uma das condições de Inada) infere-se que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(k)/k] = 0. \quad (\text{A.21})$$

Além disso, dado que $\frac{d}{dk} [f(k) - kf'(k)] = -kf''(k) > 0$ decorre que o salário doméstico efetivo é uma função estritamente crescente da razão capital-trabalho efetivo e, portanto:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(k) - kf'(k)] = \infty. \quad (\text{A.22})$$

Os limites (A.21) e (A.22) permitem concluir que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{sf(k)}{k} - (\delta + x) \left[\frac{f(k) - kf'(k)}{\omega} \right] \right\} = -\infty. \quad (\text{A.23})$$

Como $f(k)$ é uma função C^1 em qualquer $k \geq 0$, a partir de (A.20) e (A.23) infere-se, baseado no teorema do valor intermediário, que existe um $k^* > k_c > \kappa$ tal que vale (5.6). Sendo assim, por (A.18) existe para cada k^* um único valor bem definido de $\ell^* > 0$ dado por (5.5). Considerando (5.5), para que se tenha $\ell^* < 1$ a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$f(k^*) - k^* f'(k^*) R^\lambda < \omega. \quad (\text{A.24})$$

Unicidade do ponto de equilíbrio de estratégia mista (k^, ℓ^*) :*

Desde que $f(k) - kf'(k) > 0$ e $f''(k) < 0$ então:

$$\mu'(k) = -\frac{s[f(k) - kf'(k)]}{k^2} + \frac{(\delta + x)kf''(k)}{\omega} < 0 \quad (\text{A.25})$$

e, portanto, $\mu(k)$ é uma função estritamente decrescente de k . Logo, k^* é único, conseqüentemente, considerando (5.5), o ponto (ℓ^*, k^*) é único. ;

APÊNDICE 4: PROVA DA PROPOSIÇÃO 4

A matriz Jacobiana da linearização em torno do estado estacionário $(\tilde{k}_s, 1)$ é dada por:

$$J(1, \tilde{k}_s) = \left[\begin{array}{c|c} sf'(\tilde{k}_s)R^\lambda - (\delta + x) & \{[f(\tilde{k}_s) - \tilde{k}_s f'(\tilde{k}_s)]R^\lambda - \omega\}(\tilde{k}_s - \kappa) - \lambda sf(\tilde{k}_s)R^\lambda \\ \hline 0 & -\{[f(\tilde{k}_s) - \tilde{k}_s f'(\tilde{k}_s)]R^\lambda - \omega\} \end{array} \right] \quad (\text{A.26})$$

da qual obtém-se:

$$\det J(\tilde{k}_s, 1) = -[sf'(\tilde{k}_s)R^\lambda - (\delta + x)]\{[f(\tilde{k}_s) - \tilde{k}_s f'(\tilde{k}_s)]R^\lambda - \omega\}, \quad (\text{A.27})$$

e

$$\text{tr} J(\tilde{k}_s, 1) = sf'(\tilde{k}_s)R^\lambda - (\delta + x) - \{[f(\tilde{k}_s) - \tilde{k}_s f'(\tilde{k}_s)]R^\lambda - \omega\}.$$

Dado (A.27), desde que $sf'(\tilde{k}_s)R^\lambda - (\delta + x) < 0$, conclui-se que o ponto de equilíbrio $(\tilde{k}_s, 1)$ será um sorvedouro da linearização em sua vizinhança caso $f(\tilde{k}_s) - \tilde{k}_s f'(\tilde{k}_s)R^\lambda - \omega > 0$, pois sob a hipótese de que a economia doméstica é uma fornecedora líquida de mão-de-obra neste estado estacionário tem-se $\det J(\tilde{k}_s, 1) > 0$ e $\text{tr} J(\tilde{k}_s, 1) < 0$. Pelo teorema de Hartman-Grobman, então, conclui-se que o ponto de equilíbrio $(\tilde{k}_s, 1)$ do sistema (5.3) é um atrator local se

$f(\tilde{k}_s) - \tilde{k}_s f'(\tilde{k}_s)]R^\lambda - \omega > 0$. Quando a economia doméstica é receptora líquida de mão-de-obra no estado estacionário em questão, isto é, se $f(\tilde{k}_s) - \tilde{k}_s f'(\tilde{k}_s)]R^\lambda - \omega < 0$, então o ponto de equilíbrio $(\tilde{k}_s, 1)$ será um ponto de sela da linearização em sua vizinhança, já que $\det J(\tilde{k}_s, 1) < 0$. O ramo estável será o *locus* $\{(\ell, k) \in \Theta : \ell = 1 \text{ e } k \neq \tilde{k}_s\}$. Consequentemente, pelo teorema de Hartman-Grobman, conclui-se que o ponto de equilíbrio $(\tilde{k}_s, 1)$ do sistema (5.3) é um repulsor em uma vizinhança deste ponto contida no conjunto $\{(k, \ell) \in \Theta : k \neq \tilde{k}_s \text{ e } \ell < 1\}$ se $f(\tilde{k}_s) - \tilde{k}_s f'(\tilde{k}_s)]R^\lambda - \omega < 0$.

A matriz Jacobiana da linearização em torno do estado estacionário (k^*, ℓ^*) é dada por:

$$J(\ell^*, k^*) = \begin{bmatrix} \frac{(\delta+x)}{sf(k^*)} \{ (1-\ell^*)(k^*)^2 f''(k^*)(k^* - \kappa) - s[f(k^*) - k^* f'(k^*)] \} & \frac{\lambda}{\ell^*} \{ (1-\ell^*)\omega(k^* - \kappa) - (\delta+x)k^* \} \\ -\frac{(\delta+x)}{sf(k^*)} [\ell^* (1-\ell^*)(k^*)^2 f''(k^*)] & -(1-\ell^*)\lambda\omega \end{bmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

da qual obtém-se:

$$\det J(k^*, \ell^*) = \frac{(\delta+x)}{sf(k^*)} (1-\ell^*)\lambda \{ s\omega [f(k^*) - k^* f'(k^*)] - (\delta+x)(k^*)^3 f''(k^*) \} > 0, \quad (\text{A.29})$$

e

$$\text{tr} J(k^*, \ell^*) = \frac{(\delta+x)}{sf(k^*)} \{ (1-\ell^*)(k^*)^2 f''(k^*)(k^* - \kappa) - s[f(k^*) - k^* f'(k^*)] \} - (1-\ell^*)\lambda\omega < 0.$$

De (A.29) infere-se que o ponto de equilíbrio (k^*, ℓ^*) é um sorvedouro da linearização em sua vizinhança. Pelo teorema de Hartman-Grobman, o ponto de equilíbrio (k^*, ℓ^*) do sistema (5.3) é um atrator local. ;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARRO, R. J., SALA-I-MARTIN, X. *Economic growth*. Cambridge: MIT Press, 2001.
- BONOMO, M., CARRASCO, V., MOREIRA, H. Aprendizado evolucionário, inércia inflacionária e recessão em desinflações monetárias, *Revista Brasileira de Economia*, v. 57, n. 4, out.-dez., 2003.
- HOFBAUER, J., SIGMUND, K. *The theory of evolution and dynamic systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
- PRADO, E. F. S. Dilema dos prisioneiros e dinâmicas evolucionárias, *Estudos Econômicos*, v. 29, n. 2, abr.-jun., p. 249-266, 1999.

_____. Dois modelos clássicos de economia monetária, *Economia Aplicada*, v. 5, n. 3, jul.-set., p. 547-567, 2001.

PRADO, E. F. S., KADOTA, D. K., SOROMENHO, J. E. C. Survival of Technologies: an evolutionary game approach, *Economia Aplicada*, v. 7, n. 2, jun. 2003.

SAMUELSON, L. *Evolutionary games and equilibrium selection*. Cambridge: MIT Press, 1997.

SILVEIRA, J. J. Ciclos clássicos num ambiente de racionalidade limitada, *Estudos Econômicos*, v. 33, n. 4, out.-dez., p. 701-734, 2003.

SOROMENHO, J. E. C., KADOTA, D. K., PRADO, E. F. S. Scale and externalities in an evolutionary game model, *Estudos Econômicos*, v. 31, n. 3, jul.-set., p. 529-550, 2001.

VEGA-REDONDO, F. *Evolution, games and economic behaviour*. Oxford: Oxford University Press, 1996.

WEIBULL, J. W. *Evolutionary game theory*. Cambridge: MIT Press, 1995.