

UM MODELO DE OPÇÕES REAIS COM INVESTIMENTO INCERTO, SEQÜENCIAL E COM TEMPO DE CONSTRUÇÃO*

Guilherme B. Martins**

Marcos Eugênio da Silva***

* Este trabalho se baseia na tese de mestrado do primeiro autor com orientação do segundo.

** Guilherme possui mestrado em economia pelo IPE-USP e trabalha na área de fusões e aquisições do Banco Itaú BBA S.A.. Telefone: 3708 8163 ou 98612045. Email: gmartins@itaubba.com.br

*** Marcos Eugênio é professor do Departamento de Economia da Fea-USP. Telefone: 3091 6070. Email: medsilva@usp.br

Resumo

Este artigo desenvolve um modelo de opções reais com investimento incerto, seqüencial e com tempo de construção. Incorporam-se no modelo as opções reais de investir e abandonar a atividade. O modelo aborda o problema de maximização de uma empresa diante de um investimento com as características citadas. A equação diferencial do ativo é obtida utilizando programação dinâmica e avaliação neutra ao risco. Em particular, para o período da construção, a equação diferencial é parcial e elíptica, o que demanda a utilização de métodos numéricos. Os principais resultados do artigo são que (i), com investimento incerto, seqüencial e com tempo de construção, o valor de esperar, apontado na literatura de opções reais como o responsável pela diferença entre a regra de decisão de investimento baseada no NPV e a baseada em um modelo de opções reais, pode não ser tão significativo e (ii) o aumento da incerteza pode antecipar o investimento.

1. Introdução

Este artigo avalia a decisão de investimento de uma empresa em um modelo com opções reais múltiplas, que combina estratégias de entrada e saída com investimento incerto, seqüencial e com tempo de construção. A decisão de investimento da empresa ocorre em um cenário no qual (i) o valor do ativo é incerto, (ii) o custo total do investimento é incerto, (iii) há tempo de construção e (iv) o investimento ocorre em etapas.

A incerteza sobre o valor do ativo não necessita de maiores explicações. Oscilações da demanda, dos preços e dos custos de produção afetam o fluxo de caixa gerado pelo ativo e , conseqüentemente, o seu valor.

Da mesma forma, o custo do investimento para desenvolver o projeto também é incerto. Como exemplo, basta notar que diversos bens de capital são cotados em dólar; assim uma empresa no Brasil deve levar em consideração o risco cambial no valor necessário para construir uma fábrica.

A possibilidade de realizar os investimentos em etapas também é uma característica comum de diversos tipos de investimentos. Alguns exemplos tradicionais são o lançamento de novos produtos, a pesquisa e desenvolvimento de novos medicamentos, exploração de recursos naturais como o petróleo, a expansão de uma planta industrial e empreendimentos imobiliários. A característica essencial do investimento seqüencial é a possibilidade de se suspender ou abandonar o investimento se o valor esperado do projeto completo diminui ou se o custo para completar o investimento cresce.

Outra característica importante do modelo é a inclusão de tempo de construção (*time to build*), que está presente em praticamente todos os investimentos em ativos reais.

Determinada as características do investimento, o modelo aborda a decisão de uma empresa detentora de uma opção de investir em um projeto com as características acima. Adicionalmente, a empresa possui as opções reais de (i) como o investimento é seqüencial, abandonar o projeto na construção e (ii) quando o ativo estiver operando, abandonar a atividade.

A literatura econômica de opções reais aborda de certa maneira os aspectos citados acima. Entretanto, na maioria dos casos considera apenas um ou outro aspecto. O quadro a abaixo resume as hipóteses de alguns modelos.

Como apresentado na Figura 1.1, nenhum dos modelos verifica a interação dos diversos aspectos e opções reais aqui levantados. No modelo desenvolvido neste artigo todos os aspectos da tabela são incorporados.

Figura 1.1 – Resumo das Hipóteses de Artigos Seleccionados

	Volatilidade do Ativo	Volatilidade do Investimento	Investimento		Opções		
			Sequencial	Time to Build	Investir	Abandonar ou Suspender Investimento	Abandonar ou Suspender Atividade
Dixit & Pindyck 1 (1994) - Cap 6	x				x		x
Dixit & Pindyck 2 (1994)- Cap 6	x	x			x		
Dixit & Pindyck 3 (1994)- Cap 7	x				x		x
Dixit & Pindyck 4 (1994)- Cap 10	x		x	x	x	x	
Dixit & Pindyck 5 (1994)- Cap 10		x	x	x	x	x	
Medeiros (2001)	x	x		x	x		
Brach & Paxon (2001)	x		x		x	x	
Ilan & Strange (1996)	x			x	x		x
Majd & Pindyck (1987)	x		x	x	x	x	
Milne e Whalley (2000)	x		x	x	x	x	
Ilan & Strange (1998)	x		x	x	x	x	
Kellogg e Charnes (2000)	x		x		x	x	

O restante do artigo está organizado da seguinte forma: (i) a Parte 2 contém alguns dos principais fatos estilizados da literatura de opções reais; (ii) a Parte 3 apresenta o modelo adotado neste artigo, a sua resolução e a interpretação dos resultados; (iii) a Parte 4 mostra as conclusões e; (iv) o apêndice detalha alguns dos métodos utilizados na resolução do modelo.

2. Fatos Estilizados da Teoria de Opções Reais

A literatura de opções reais é bastante ampla, e conta tanto com artigos teóricos quanto aplicações práticas¹. Os modelos mais básicos consideram geralmente uma empresa que possui uma opção de investir em um ativo real, cujo retorno é incerto e modelado a partir de um processo estocástico, e que o investimento é imediato, não sequencial e com custo total conhecido e certo.

Nestes modelos aparecem dois resultados que se tornaram fatos estilizados da literatura de opções reais: (i) a regra de investimento baseada no valor presente líquido (“NPV”) gera equívocos ao desconsiderar o valor da opção de se esperar por novas informações; (ii) e o aumento da incerteza adia o investimento.

A tradicional regra de investimento do NPV afirma que se deve realizar o investimento se o valor presente do fluxo de caixa futuro, descontando a uma taxa apropriada, for igual ou superior a zero.

Nos modelos com opções reais, a regra de decisão da empresa muda. Na presença de incerteza, ao investir, a empresa abdica da oportunidade de aguardar novas informações sobre o projeto. Mais ainda, a empresa deixa de ter um ativo: a opção de investir. Este custo de oportunidade deve ser mensurado e incorporado na avaliação do investimento.

Se denominarmos o valor de uma opção de investir como V_0 , a nova regra de investimento seria dada por

$$\text{NPV} - V_0 = 0 \quad (2.1)$$

Analogamente, a regra pode ser apresentada em função do valor de se esperar por novas informações. Desta forma, a empresa somente investe quando o valor de esperar novas informações é zero. Denominando esse valor de esperar de F_0 , a regra correspondente a (2.1) é dada por

$$F_0 = 0 \quad (2.2)$$

A Figura 2.1 abaixo ilustra a diferença entre a regra do NPV e a regra baseada em um modelo de opções reais. A simulação foi feita considerando um modelo básico de opções reais, no qual a incerteza do valor do ativo é modelada através de um movimento browniano geométrico (MBG), e o valor do investimento é certo, imediato e não sequencial². Os parâmetros assumidos no modelo estão apresentados na Figura 2.1.

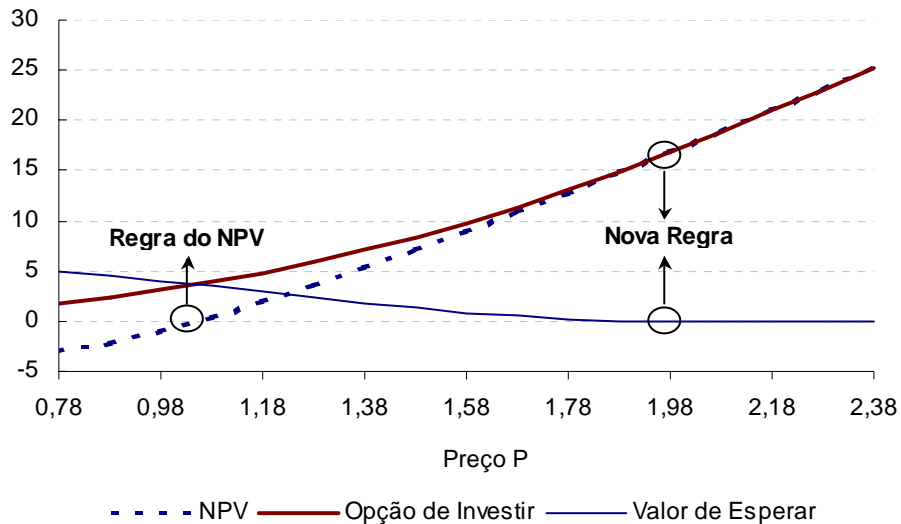
¹ Dixit e Pindyck (1994) permanecem sendo o principal livro texto da literatura de opções reais. Dias (1996) também apresenta uma revisão geral sobre o tema.

² Na simulação, considera-se um modelo de opções reais no qual a empresa possui a opção de investir em um ativo que produz uma unidade de produto por período, vendido ao preço P_t . Para produzir essa unidade, a empresa incorre no custo C por período, constante no tempo. O investimento necessário para se constituir o

Pela regra tradicional do NPV, o investimento seria feito com P igual a 1,05. No novo modelo, o investimento ocorre apenas em $P_H = 1,98$. É importante ressaltar que a simulação foi feita com $\sigma = 0,2$, o que mostra que mesmo níveis médios de incerteza, o valor de esperar e o descolamento da regra do NPV são significativos.

Figura 2.2

Parâmetros: $\sigma = 0,2$; $r = 0,02$; $\phi = 0,2$; $\alpha = 0,02$; $K = 4$; $C = 1$, $E = 0$.



A racionalidade econômica que suporta o resultado é simples. O investimento que a empresa faz é irreversível. Com incerteza, o retorno futuro sobre esse investimento pode não ser o desejado. Assim, vale a pena adiar a decisão de investir para evitar possuir o ativo em um cenário de preço ruim. Portanto, a empresa exige uma “folga” no preço do produto, que lhe proporcione um lucro inicial extraordinário, para compensar a possibilidade de prejuízos no futuro.

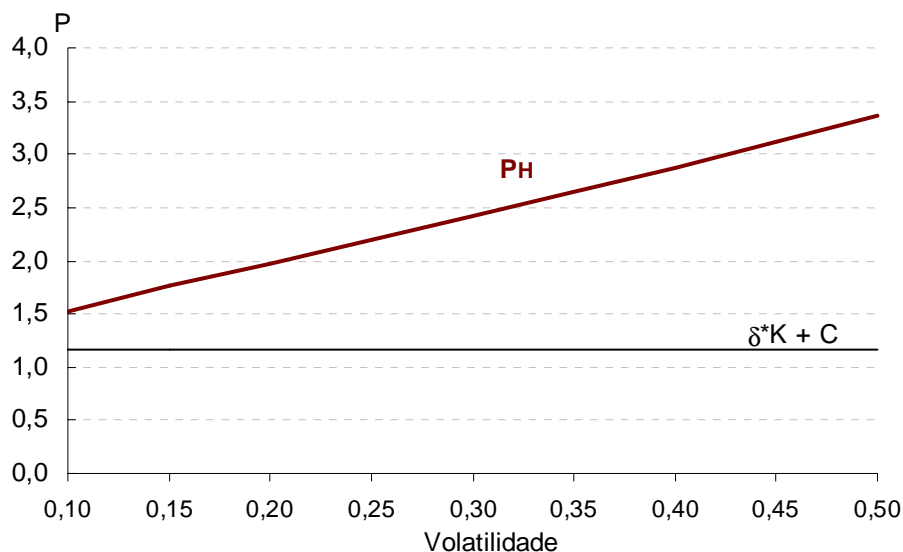
Outra forma de verificar o efeito da incerteza e das opções reais é comparar o preço que aciona a decisão de investir no modelo com a clássica regra para investimentos de Marshall, que afirma que a empresa deve investir quando $P \geq \delta K + C$, isto é quando o preço for superior ao custo de produção mais o retorno do capital. No modelo de opções reais, o nível de preço a partir do qual da empresa investe é dado por P_H . A Figura 2.2

ativo é conhecido e dado por K . Quando está em operação, a empresa detém uma opção de abandonar a atividade, em contrapartida a um fluxo de caixa E . Caso abandone a atividade, a empresa deixa de ter a opção de investir. A incerteza é incorporada pelo comportamento de P_t , que segue um MBG dado por $dP_t = \alpha P_t dt + \sigma P_t dW_t$, onde dW_t é o incremento de um processo de *Weiner*. Esse processo estocástico é transformado em um processo neutro ao risco considerando uma taxa de retorno *risk free* r e um prêmio de risco para P dado por ϕ . Detalhes e discussões sobre o modelo, seus parâmetros e método de resolução são deixadas para o Capítulo 3, no qual se desenvolve o modelo deste artigo.

mostra esse preço para diferentes níveis de volatilidade valores e o calculado através da regra de Marshall.

Figura 2.2

Parâmetros: $r = 0,02$; $\phi = 0,2$; $\alpha = 0,02$; $K = 4$; $C = 1$; $E = 0$



A Figura 2.2 também ilustra outro o segundo fato estilizado da literatura de opções reais: o aumento da volatilidade aumenta o incentivo a esperar. Isto pode ser visto principalmente pela diferença entre o P_H e o preço da regra de Marshall: quanto maior a volatilidade maior é o primeiro em relação ao segundo. Note que este fato também implica que aumento da incerteza incentiva o adiamento do investimento. A lógica econômica novamente é simples: maior incerteza torna mais valiosa a opção de esperar novas informações para evitar cenários desfavoráveis e, portanto, posterga-se o investimento.

A partir dos modelos básicos de opções reais, uma linha de pesquisa sobre o assunto procura alterar as hipóteses assumidas e verificar os efeitos sobre os fatos estilizados discutidos acima, assim como identificar novos efeitos sobre as decisões de investimentos das empresas.

A maioria dos artigos citados na Figura 1.1 segue esta linha de pesquisa. O presente artigo também se encaixa nesta estratégia de estudo. Os demais capítulos do trabalho apresentam o modelo, sua resolução e os resultados obtidos.

3. Investimento Seqüencial, Incerto e Tempo de Construção

O modelo desenvolvido neste trabalho considera que o investimento possui três características importantes: (i) o valor total do investimento é incerto; (ii) a construção do ativo demanda tempo; (iii) e a decisão de investir ocorre em diversas etapas.

Na literatura econômica, alguns artigos incorporam incerteza dos investimentos junto com a incerteza do valor do projeto. Dixit e Pindyck (1994 – capítulo 6) constroem um modelo no qual o investimento segue um movimento browniano geométrico (MBG) e estudam a decisão de entrada de uma empresa. Medeiros (2001) aplica um modelo de opções reais ao mercado imobiliário residencial no qual o custo do investimento também segue um MBG. Brach e Paxson (2001), em um modelo de opções reais para estimar o valor de um projeto de P&D de um novo medicamento, consideram que o gasto total com a pesquisa é conhecido, mas apontam que isso é uma abstração muito forte da realidade.

Brach e Paxson (2001) argumentam ainda sobre importância de se distinguir as incertezas do custo do investimento em exógenas e técnicas. No primeiro grupo incluem-se as variações nos custos do trabalho, dos equipamentos e de outros insumos envolvidos em um projeto; no segundo, entram as dificuldades para a realização de um projeto que somente são descobertas à medida que o investimento ocorre. Por exemplo, o tempo total de construção pode prolongar-se além do esperado e em um programa de P&D, o cumprimento de regulação governamental pode ser maior do que as previamente conhecidas ou a pesquisa pode revelar dificuldades inesperadas.

O tempo demandado para a construção de um ativo é conhecido na literatura como *time to build*, ou simplesmente tempo de construção. A característica fundamental do *time to build* é o intervalo de tempo que existe entre a decisão de realizar um projeto e o momento em que esse começa a gerar um fluxo de caixa. Em alguns casos o tempo de construção de uma nova planta industrial pode ser muito significativo, como nas indústrias de papel e celulose, na siderurgia e em hidroelétricas. O desenvolvimento de novos produtos também pode ser um processo demorado. Investimentos de *venture capital* são um processo demorado, com diversas etapas, onde o momento dos primeiros desembolsos difere significativamente do início da geração de caixa. Em todos esses casos, o *time to build* é importante e deve ser considerado.

Por último, além de tomar tempo, em muitos casos, as decisões de investimentos são tomadas em diversas etapas. Por exemplo, decidir investir em um programa de P&D e investir em uma planta industrial para produzir o produto desenvolvido são decisões distintas e tomadas em momentos diferentes. O exercício de uma opção que dá direito a um programa de P&D tem como contrapartida não o ativo final, mas sim uma outra opção que dá direito a construção da fábrica.

Em especial, investimentos de *venture capital* são essencialmente seqüenciais. Como envolvem empresas novas, com produtos novos, que precisam ainda ser desenvolvidos e

testados no mercado, os investimentos ocorrem de forma gradativa e apenas à medida que o desenvolvimento do produto e os testes de mercado se mostrem favoráveis.

Brach e Paxson (2001), Kellogg e Charnes (2000), Milne e Whalley e Ilan e Strange (1998) desenvolvem modelos nos quais os investimentos ocorrem em várias etapas. Porém, em nenhum deles há incerteza quanto ao custo do investimento. O modelo de Dixit e Pindyck (1994 – capítulo 10) incorpora o investimento seqüencial e incerto, em uma modelagem de investimento contínuo da mesma forma adotada aqui.

3.1 Descrição do Modelo

Considere uma empresa com uma oportunidade específica de investimento, sem tempo de vida determinado, em um projeto para produzir uma unidade de um produto cuja demanda é incerta.

Como as vendas estão fixadas em uma unidade por período, modela-se a incerteza da receita assumindo que o preço do produto segue um movimento browniano geométrico (MBG).

$$dP_t = \alpha P_t dt + \sigma P_t dW_t \quad (3.1)$$

A qualquer momento, a firma pode iniciar a investir na “construção”³ do ativo. O custo inicialmente estimado da construção é dado por K_0 . O investimento não ocorre de uma única vez, mas seqüencialmente, através de um gasto de I unidades monetárias, constante no tempo, por período.

Ao longo da construção, o montante total do investimento necessário para concluir a obra é desconhecido e segue um processo estocástico dado pela equação:

$$dK_t = -I dt + v (I K_t)^{1/2} dZ_t \quad (3.2)$$

na qual, K_t é o valor do investimento que falta para acabar a construção do ativo, I é o investimento por unidade de tempo e dZ_t é um processo de Wiener independente do processo dW_t . Note que dZ_t captura a incerteza técnica do investimento porque multiplica o termo I . Assim as realizações de dZ_t só afetam K_t enquanto a empresa investir.

Para incorporar tempo de construção no modelo, assume-se que o valor inicial esperado da construção é maior do que o investimento por período, isto é, $K_0 > I$.

Uma vez tomada a decisão de iniciar o projeto, a firma pode, a qualquer momento, abandonar a construção em troca de um fluxo de caixa conhecido E_1 , que pode ser positivo,

³ A “construção” pode significar efetivamente um gasto com obras, ou gastos com P&D, pesquisas de mercado, etc.

no caso do capital fixo poder ser utilizado em alguma outra atividade, ou negativo, caso haja custos de desativação, com trabalhista ou de “sucateamento”.

Nos modelos de investimento seqüencial da literatura, há, em geral, um número específico de etapas onde a firma decide se continua ou não com o projeto. Aqui, essa decisão ocorre continuamente. Assim, pode-se interpretar que cada Real investido no projeto dá direito, ou a opção, da empresa investir outro Real no instante seguinte.

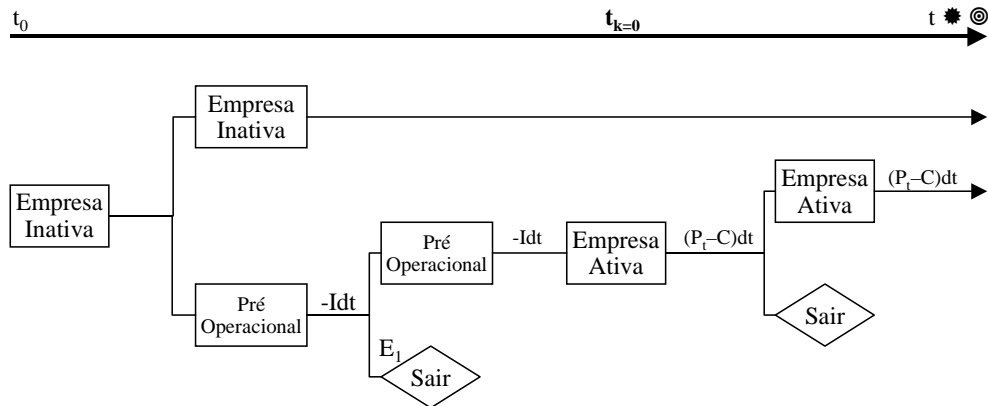
Quando $K_t = 0$, a construção terminou e a empresa possui um ativo que produz uma unidade do produto por período, vendida ao preço P_t . Para tanto, a empresa incorre no custo C , constante no tempo, por período. Caso decida abandonar a atividade, incorrerá em fluxo de caixa conhecido E_2 , que, como E_1 , pode ser positivo ou negativo.

Uma vez que investiu, completou a construção do ativo e depois o abandonou, considera-se que a empresa está fora do mercado e não possui mais a oportunidade de investir. O mesmo vale se a firma abandonar o projeto durante a fase de construção.

A Figura 3.1 abaixo ilustra as alternativas da empresa e o fluxo de caixa correspondente a cada alternativa

Figura 3.1 – Ilustração do Problema da Empresa

O problema é contínuo e as decisões de investir e sair ocorrem em todo t . Para efeito apenas ilustrativo escolheu-se um t qualquer para marcar os momentos das decisões.



3.2 Solução do Modelo

No modelo descrito acima, há quatro estados possíveis para a empresa: inativa, pré operacional, ativa ou fora do mercado. Os valores da empresa nas três primeiras fases são denominados, respectivamente, V_0 , V_1 e V_2 . Caso abandone durante a construção, a empresa vale E_1 e, após a construção, E_2 .

Esses valores são compostos do valor do ativo propriamente dito e das diferentes opções que a empresa possui. As opções de diferir o investimento, abandonar o projeto durante a

fase de investimento e de abandonar o projeto quando este estiver operando estão embutidas, respectivamente, em V_0 , V_1 e V_2 . Os valores destas opções são calculados em um momento posterior. Primeiro, calcula-se os valores V_0 , V_1 e V_2 como funções das variáveis estados P e K .

Além de obter esses valores, é necessário encontrar os valores de P onde é ótimo exercer as opções; isto é, P_H , acima do qual é ótimo investir no projeto, P_M , abaixo do qual é ótimo abandonar o projeto durante o período de investimento e P_L , abaixo do qual é ótimo abandonar o projeto em operação.

A estratégia de resolução segue a metodologia de avaliação neutra ao risco do Capítulo 2: primeiro transforma-se os processos estocásticos (3.1) e (3.2) em processos com medidas de probabilidades equivalentes neutras ao risco e depois se assume que as decisões de investir são tomadas por uma firma neutra ao risco.

Os processos (3.1) e (3.2) com medida de probabilidade equivalente neutra ao risco são dados por

$$dP_t = (\alpha - \phi \sigma) P_t dt + \sigma P_t dW_t^* \quad (3.3)$$

$$dK_t = -I dt + v (I K_t)^{1/2} dZ_t \quad (3.4)$$

onde dW_t^* indica que o processo é neutro ao risco e $\phi \sigma$ é o prêmio de risco – excesso de retorno médio por unidade de desvio padrão – associado a dW_t . Note que, no caso de dK_t , assume-se que a incerteza técnica dZ_t não é correlacionada com a carteira de mercado e, portanto, não possui risco sistêmico. Assim, não há prêmio associado a dZ_t e o processo estocástico de dK_t permanece exatamente o mesmo.

Vale destacar que, se P_t não é um preço observado, nada garante que a sua taxa de retorno esperado seja igual à de equilíbrio de mercado (ver McDonald e Sigel (1984 e 1985) e Trigeorgis (1999 – Capítulo 3)). Assim, define-se δ_p como uma espécie de dividendo contínuo, ou *covenience yield*, que mede a diferenças entre o retorno esperado de P e o seu retorno de equilíbrio de mercado, dado por, $\mu_p = r + \phi \sigma$. Portanto, $\delta_p = \mu_p - \alpha$. Aqui, assume-se que δ_p é positivo.

Segue que (3.3) pode ser substituído pela forma mais usual de se apresentar processos na medida neutra ao risco:

$$dP_t = (r - \delta_p) P_t dt + \sigma P_t dW_t^* \quad (3.5)$$

Uma vez definidos os processos estocásticos em medida equivalente neutra ao risco, os valores V_0 , V_1 e V_2 são definidos pelas decisões ótimas de uma empresa neutra ao risco.

Empresa Inativa: $V_0(P_t, K_t)$

O valor da empresa inativa, V_0 , é definido pela maximização de uma firma neutra ao risco que escolhe entre permanecer inativa ou iniciar o investimento.

$$V_0(P_t, K_t) = \text{Max } E_0 \{ e^{-r dt} V_0(P_t + dP_t, K_t + dK_t); V_1(P_t, K_t) \} \quad (3.6)$$

O primeiro termo entre as chaves reflete a decisão de permanecer inativa; como não há fluxo imediato associado a essa decisão o retorno é a variação esperada do valor de empresa. O segundo termo é o valor da empresa na fase pré-operacional.

Para o intervalo de preços $P_t < P_H$, a firma permanece inativa e

$$V_0(P_t, K_t) = E_0 \{ e^{-r dt} V_0(P_t + dP_t, K_t + dK_t) \} \quad (3.7)$$

Expandido a expressão entre as chaves através do uso do Lema de Itô⁴,

$$V_0 = E_0 \{ (1 - r dt) [V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial P} dP + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial P)^2} (dP)^2 + \frac{\partial V_0}{\partial K} dK + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial K)^2} (dK)^2] \} \quad (3.8)$$

substituindo as equações (3.3) e (3.4) em (3.8), com $I = 0$ pois a empresa está inativa, e aplicando o operador esperança

$$V_0 = (1 - r dt) \{ V_0 + (\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_0}{\partial P} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 V_0}{(\partial P)^2} dt \}$$

$$0 = \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 V_0}{(\partial P)^2} + (\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_0}{\partial P} - r V_0 \quad (3.9)$$

(3.9) é a equação diferencial que $V_0(P, K)$ deve obedecer enquanto $P < P_H$. A equação está sujeita as seguintes condições de contorno

$$V_0(0, K) = 0 \quad (3.10)$$

$$V_0(P_H, K) = V_1(P_H, K) \quad (3.11)$$

⁴ Para simplificar, sempre que o contexto for claro, omite-se os argumentos das funções e a dependência das variáveis estado no tempo.

$$\frac{\partial V_0(P_H, K)}{\partial P} = \frac{\partial V_1(P_H, K)}{\partial P} \quad (3.12)$$

A condição (3.10) afirma que quando P igual 0, o valor da oportunidade de investir, V_0 , é zero. As condições (3.11) e (3.12) são as condições de *value matching* e *smooth pasting* adequadas para o problema. Essas condições aparecem em todos os modelos de opções reais. Ambas podem ser justificadas através de argumentos econômicos. O Apêndice 3 apresenta uma demonstração não rigorosa de ambas as condições.

A equação (3.9) é uma equação diferencial ordinária cuja solução geral é dada por

$$V_0(P, K) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2} \quad (3.13)$$

na qual A_1 e A_2 são coeficientes a determinar e β_1 e β_2 são as raízes da forma quadrática

$$1/2 \sigma^2 \beta(\beta-1) + (\alpha - \phi \sigma) \beta - r = 0 \quad (3.14)$$

dadas por

$$\beta = 1/2 - (\alpha - \phi \sigma) / \sigma^2 \pm \sqrt{((\alpha - \phi \sigma) / \sigma^2 - 1/2)^2 + 2r / \sigma^2} \quad (3.15)$$

Denomine (3.14) como uma função de β , $\varphi(\beta)$. Como, $\varphi''(\beta) = \sigma^2/2 > 0$, φ é uma função convexa de β que, por ser de segundo grau, possui duas raízes, dadas por (3.15). Note que $\varphi(0) = -r < 0$ e $\varphi(1) = (\alpha - \phi \sigma) - r = -\delta < 0$ (onde $\delta = \mu - \alpha > 0$). Assim, φ possui uma raiz negativa e outra positiva e maior do que 1. Denomine β_1 a raiz positiva e β_2 a negativa ($\beta_2 < 0 < 1 < \beta_1$).

Como $\beta_2 < 0$, (3.10) implica que $A_2 = 0$. Portanto $V_0(P, K)$ é dado por

$$V_0(P, K) = A_1 P^{\beta_1} \quad (3.16)$$

À primeira vista, a função (3.16) surpreende pois não possui K como argumento. Mas a constante A_1 , determinada pelas condições *value matching* e *smooth pasting*, depende de K . Adicionalmente, como será visto na resolução completa do modelo, P_H também depende de K .

Intuitivamente, espera-se que o investimento será diferido com P baixo ou K alto. Essa intuição origina a condição (3.10) e a dependência de P_H em K .

Empresa Pré Operacional: $V_1(P,K)$

A solução de V_1 é dada pela maximização de uma firma neutra ao risco que escolhe entre continuar a investir na construção do ativo ou abandonar o investimento:

$$V_1(P,K) = \text{Max } E_0\{ -I dt + e^{-r dt} V_1(P + dP, K + dK); E_1\} \quad (3.17)$$

O primeiro termo entre as chaves reflete a decisão de continuar o investimento. O retorno da empresa é dado pelo fluxo de caixa imediato para continuar a construção, $-I dt$, e a valorização instantânea do valor da empresa. O segundo termo é o valor da empresa caso abandone o projeto.

Para o intervalo de preços $P > P_M$ a empresa continua investindo. Neste intervalo,

$$V_1(P,K) = E_0\{ -I dt + e^{-r dt} V_1(P + dP, K + dK)\} \quad (3.18)$$

Como na seção anterior, expandido a expressão entre as chaves através do uso do Lema de Itô,

$$V_1 = E_0 \left\{ -I dt + (1-r dt) \left[V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial P} dP + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_1}{(\partial P)^2} (dP)^2 + \frac{\partial V_1}{\partial K} dK + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_1}{(\partial K)^2} (dK)^2 \right] \right\} \quad (3.19)$$

substituindo as equações (3.3) e (3.4) em (3.19), com a diferença que agora $I \neq 0$, e aplicando o operador esperança

$$\begin{aligned} V_1 &= -I dt + (1-r dt) \left\{ V_1 + [(\alpha - \phi \sigma)P \frac{\partial V_1}{\partial P} + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 V_1}{(\partial P)^2} - I \frac{\partial V_1}{\partial K} + \frac{1}{2} v^2 IK \frac{\partial^2 V_1}{(\partial K)^2}] dt \right\} \\ 0 &= \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 V_1}{(\partial P)^2} + \frac{1}{2} v^2 IK \frac{\partial^2 V_1}{(\partial K)^2} + (\alpha - \phi \sigma)P \frac{\partial V_1}{\partial P} - I \frac{\partial V_1}{\partial K} - r V_1 - I \end{aligned} \quad (3.20)$$

V_1 é a solução da equação diferencial parcial (3.20) sujeito à

$$V_1(P,0) = V_2(P) \quad (3.21)$$

$$P \rightarrow \infty \Rightarrow V_1(P, K) = V_2(P) e^{-rK/I} - \int_0^{K/I} I e^{-rt} dt \quad (3.22)$$

$$V_1(P_M, K) = E_1 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial V_1(P_M, K)}{\partial P} = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial V_1(P_M, K)}{\partial K} = 0 \quad (3.25)$$

A condição (3.21) afirma que quando a construção estiver concluída ($K=0$), a empresa operacional possui o mesmo valor que a empresa ativa. (3.22) estabelece que, com P alto, dificilmente a construção será abandonada e, conseqüentemente, o valor da empresa pré-operacional é o valor presente da empresa ativa menos o montante que falta investir.

As condições (3.23), (3.24) e (3.25) são as condições de *value matching* e *smooth pasting*. Vale ressaltar também que, como P_H , P_M depende de K .

Por último, a equação (3,20) é uma equação diferencial parcial com fronteira livre, mais precisamente uma equação elíptica ($0 < 1/4 \sigma^2 P^2 v^2 IK$), que demanda a utilização de métodos numéricos.

Empresa Ativa: $V_2(P)$

O valor da empresa ativa é definido pela maximização de uma firma neutra ao risco que escolhe entre continuar a operar ou abandonar a atividade. A empresa ativa não necessita realizar mais investimentos, assim o seu valor depende apenas de P :

$$V_2(P) = \text{Max } E_0\{ (P - C) dt + e^{-r dt} V_2(P + dP); E_2\} \quad (3.26)$$

Na equação acima, o primeiro termo entre as chaves reflete a decisão de continuar a operar, o que gera um fluxo de caixa imediato, $P-C$, e a variação instantânea do valor da empresa. O segundo termo é o fluxo da caixa associado ao abandono da atividade.

Existe um preço P_L , que é parte da solução do modelo, abaixo do qual a empresa prefere se retirar da atividade. Portanto, no intervalo de preços $P_L < P$ a empresa permanece ativa e seu valor é o dado pelo primeiro termo da equação (3.26)

$$V_2(P) = E_0\{ (P - C) dt + e^{-r dt} V_2(P + dP)\} \quad (3.27)$$

Expandindo a expressão $V_2 (P_t + dP_t)$ através do uso do Lema de Itô,

$$V_2 = E_0 \{ (P - C) dt + (1 - r dt) [V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial P} dP + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial P^2} (dP)^2] \} \quad (3.28)$$

substituindo a equações (3.3) em (3.28) e aplicando o operador esperança,

$$V_2 = (P - C) dt + (1 - r dt) [V_2 + (\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_2}{\partial P} dt + \sigma^2 P^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial P^2} dt]$$

$$\sigma^2 P^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_2}{\partial P^2} + (\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_2}{\partial P} - r V_2 + P - C = 0 \quad (3.29)$$

A equação (3.26) está sujeita à

$$P \rightarrow \infty \Rightarrow V_2(P) \rightarrow X \quad (3.30)$$

$$V_2(P_L) = E_2 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial V_2(P_L)}{\partial P} = 0 \quad (3.32)$$

A condição (3.30) afirma que quanto maior P , menor a chance de a empresa abandonar a atividade. Neste caso, a opção de abandonar tende a zero e o valor da empresa tende ao valor do intrínseco do ativo ($X = P/\delta - C/r$). As equações (3.31) e (3.32) são as condições de *value matching* e *smooth pasting* adequadas para a fronteira P_L onde a empresa é indiferente entre permanecer ativa e abandonar a atividade.

(3.29) é uma equação diferencial ordinária não homogênea. A solução da parte homogênea possui a mesma forma de (3.13) mas com coeficientes distintos de A_1 e A_2 .

A solução particular é dada por $P/\delta - C/r$, que possui uma interpretação econômica imediata: é o valor da empresa supondo que a mesma nunca exercerá a sua opção de abandonar o projeto. Basta notar que $P/\delta - C/r$ é a solução de $\int_0^{\infty} (P e^{(\alpha - \phi \sigma)t} - C) e^{-rt} dt$

Assim a solução geral de (3.29) é

$$V_2(P) = B_1 P^{\beta_1} + B_2 P^{\beta_2} + P/\delta - C/r \quad (3.33)$$

na qual B_1 e B_2 são coeficientes a determinar e, como na equação (3.13), $\beta_2 < 0 < 1 < \beta_1$ são dados por (3.15).

Como $\beta_1 > 0$, (3.30) implica que $B_1=0$. Assim

$$V_2(P) = B_2 P^{\beta_2} + P/\delta - C/r \quad (3.34)$$

Neste ponto, é importante identificar que o valor da empresa divide-se no valor do ativo propriamente dito, dado pelo valor presente do seu fluxo de caixa, X , e no valor da opção de abandonar, F_2 ; sendo que,

$$X = P/\delta - C/r \quad (3.35)$$

$$F_2(P) = B_2 P^{\beta_2} \quad (3.36)$$

Substituindo (3.34) em (3.31) e (3.32) obtêm-se um sistema de duas equações cuja resolução fornece as expressões para as incógnitas B_2 e P_L

$$B_2 P_L^{\beta_2} + P_L/\delta - C/r = E_2 \quad (3.37)$$

$$\beta_2 B_2 P_L^{\beta_2-1} + 1/\delta = 0 \quad (3.38)$$

De (3.37) e (3.38) resultam que

$$P_L = \beta_2 / (\beta_2 - 1) * \delta / r * (C + E_2 r) \quad (3.39)$$

$$B_2 P^{\beta_2} = (P / P_L)^{\beta_2} (C + E_2 r) / ((1-\beta_2) r) \quad (3.40)$$

3.3 Resolução Numérica e Análise dos Resultados

A solução completa do modelo deve ser obtida em ordem inversa: primeiro resolve-se o problema da empresa ativa, depois da pré-operacional e, por último, o da inativa.

As equações (3.40), (3.39) e (3.34) são a solução analítica do problema da empresa ativa. A solução para o problema da empresa pré-operacional resume-se a resolver numericamente a equação diferencial (3.20) através de um método de diferenças finitas. Por último, (3.16) é a solução analítica da empresa inativa e as condições (3.11) e (3.12) determinam A_1 e P_H . O Apêndice descreve em detalhes as resoluções das equações (3.20) e (3.16).

A primeira pergunta a se responder é qual o efeito das hipóteses do modelo sobre os dois fatos estilizados da teoria de opções reais apresentados no Capítulo 2: (i) opções reais

mudam a regra de decisão de investimento e (ii) quanto maior a incerteza maior a distância entre a regra do NPV e a nova regra.

O modelo desenvolvido neste artigo sugere que esses resultados são parcialmente revertidos. O primeiro resultado está enunciado a seguir.

Resultado I: Com investimento incerto, seqüencial e tempo de construção, o valor de se esperar novas informações diminui e, conseqüentemente, a decisão de investimento se aproxima da regra do NPV.

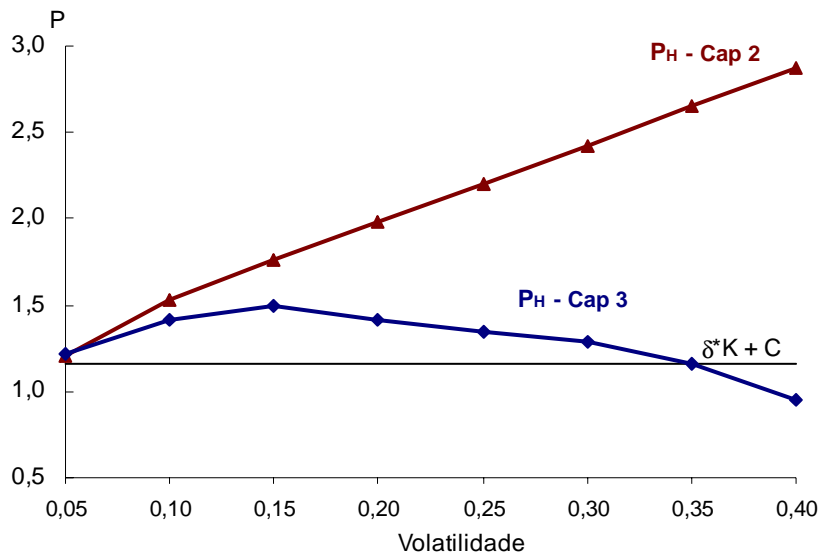
Como visto antes, a decisão de investimento em um modelo de opções reais e a regra do NPV podem ser comparadas pela distância entre preço a partir do qual a empresa inicia o investimento, P_H , e o preço da regra de Marshall. Como a Figura 3.2 a seguir indica, o P_H , ainda permanece acima do preço da regra de Marshall para quase todo o intervalo de volatilidade, mas a distância entre ambos diminui sensivelmente.

Resultado II: Para níveis elevados de volatilidade, o investimento incerto, seqüencial e com tempo de construção implica que um aumento de volatilidade diminui o preço exigido para se iniciar o investimento.

Novamente, como a Figura 3.2 ilustra, para o intervalo de volatilidade acima de 15%, um aumento de volatilidade implica em um P_H menor, sinal completamente inverso ao obtido no modelo básico de opções reais. Em outras palavras, um aumento de incerteza pode levar a firma a investir mais.

Figura 3.2

Parâmetros: $\sigma = 0,2$; $r = 0,02$; $\phi = 0,2$; $\alpha = 0,02$; $C = 1$; $v = 0,2$; $K = 4$; $I = 1$; $E1 = E2 = 0$.



No modelo tradicional de opções reais, o incentivo a diferir o investimento surge porque a incerteza afeta de maneira assimétrica o benefício e o custo de adiar o investimento. Ao esperar, a empresa evita cenários futuros adversos. Como quanto maior a incerteza maior é a probabilidade de ocorrer preços baixos, o benefício de se esperar cresce com a incerteza. Por outro lado, o custo de oportunidade é a não apropriação do fluxo de caixa instantâneo gerado pelo ativo. Na ausência de tempo de construção, se ocorrer uma alta de preço, a empresa entra imediatamente no mercado e atua no cenário favorável. Desta forma, o custo de oportunidade de esperar é independente da incerteza.

Com tempo de construção, a situação muda. Agora, a empresa não pode mais aproveitar imediatamente os cenários favoráveis. Se não investir já, a empresa corre o risco de perder um mercado com preço em alta no futuro. Assim, o custo de oportunidade de diferir passa a depender dos preços no futuro. Quanto maior a incerteza, maior a chance de ocorrer eventos extremos. A possibilidade de abandonar a construção limita o efeito dos cenários desfavoráveis. Conseqüentemente, a incerteza aumenta o custo de oportunidade de diferir o investimento. Se o benefício e o custo de diferir são positivamente afetados pela volatilidade, o efeito final passa a ser ambíguo. Pela Figura 3.3, nota-se que o segundo efeito pode predominar e o aumento da incerteza leva a firma a antecipar o investimento. Esta é a principal intuição econômica dos Resultados I e II apresentados acima.

Parte destes resultados aparece em outros trabalhos da literatura. Ilan e Strange (1996) apresentam resultado semelhante ao descrito acima. Os autores desenvolvem um modelo apenas com tempo de construção e possibilidade de abandonar a construção. Os resultados obtidos também mostram que um aumento de incerteza reduz o P_H . A explicação dos autores assemelha-se a argumentação do parágrafo anterior.

Entretanto, para valores altos de volatilidade, o resultado de Ilan e Strange segue o resultado tradicional da teoria de opções reais: o aumento da incerteza incrementa P_H . O mesmo não ocorre aqui. Como a Figura 3.3 ilustra, mesmo com volatilidade bastante alta, um aumento da incerteza continua incentivando o investimento.

A diferença entre ambos os modelos decorre da inclusão do investimento seqüencial. A possibilidade de fazer o investimento em etapas diminui ainda mais o benefício de se diferir o investimento porque dilui o *sunk cost* do investimento ao longo do tempo. Adicionando ainda a possibilidade de se abandonar durante a construção, a irreversibilidade do investimento, fundamental em toda a teoria de opções reais, diminui e, portanto, o incentivo a esperar se reduz.

A Figura 3.3 procura medir esse efeito. Em todos os cenários, o investimento total é inicialmente estimado em 4 unidades monetárias, e o tempo de construção permanece sempre em 4 anos. Porém, em cada cenário assume-se um valor diferente para um investimento imediato, denominado I_0 , que ocorre no momento em que a empresa decide investir. Quanto maior esse valor inicial, menos seqüencial é o investimento.

Figura 3.3

Parâmetros: $r = 0,02$; $\phi = 0,2$; $\alpha = 0,02$; $K/I = 4$; $C = 1$; $v = 0,2$; $E1 = E2 = 0$.

Premissas sobre Investimento				P_H			
K total	Investimento Inicial	K restante	I	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,2$	$\sigma = 0,3$	$\sigma = 0,4$
4	0,0	4,0	1,00	1,419	1,419	1,284	0,951
4	1,0	3,0	0,75	1,492	1,492	1,350	1,000
4	2,0	2,0	0,50	1,492	1,492	1,420	1,051
4	3,0	1,0	0,25	1,492	1,568	1,492	1,221
4	3,5	0,5	0,13	1,492	1,733	1,822	1,649

A simulação indica que, quanto menor o investimento inicial, menor o P_H . No caso base ($\sigma = 0,2$), se o investimento é totalmente seqüencial ($I_0 = 0$), P_H é igual a 1,419 e se $I_0 = 3,5$, o que representa 87% do investimento total, $P_H = 1,733$: um diferencial de 22%.

Outro fato extremamente importante, é que a volatilidade aumenta esse resultado: para $\sigma = 0,1$, a diferença dos preços é de apenas 5%; e, para $\sigma = 0,4$, é de 73%!

Esse resultado indica que, em modelos de opções reais, o investimento seqüencial reforça o efeito do tempo de construção nas decisões de investimento. Este aspecto, é o principal resultado desta dissertação e está enunciado a seguir.

Resultado III. Tempo de construção gera situações nas quais o aumento de incerteza pode incentivar o investimento. A inclusão do investimento seqüencial reforça esse resultado.

Neste ponto, é importante comparar os resultados obtidos com os apresentados por Milne e Whalley (2000), Majda e Pindyck (1987) e Dixit e Pindyck (1994). Todos esses trabalhos modelam o investimento como sendo seqüencial, com tempo de construção e opção de abandonar, mas apresentam resultados diversos desta dissertação. Majda e Pindyck (1987) e Dixit e Pindyck (1994) apontam que essa hipótese favorece o resultado básico da teoria de opções reais, ou seja, maior é o equívoco da regra do NPV e quanto maior incerteza, maior o incentivo de esperar e, portanto, retardar o investimento. Milne e Whalley (2000) mostram resultados semelhantes ao desta dissertação quanto a regra do NPV, mas encontram uma correlação positiva entre incerteza e o P_H .

A forma de modelar a incerteza do ativo é a principal diferença entre estes artigos e o presente trabalho. Enquanto aqui, a incerteza ocorre no preço de venda P , naqueles, é o ativo V que segue um processo estocástico. Desta forma, o custo de diferir o investimento é dado pelo *convenience yield*, δ , que é constante. Assim, o aumento da volatilidade não afeta o custo de esperar e, portanto, todo o efeito discutido acima não ocorre.

Quanto à incerteza do custo total dos investimentos, dado pelo v , a Figura 3.4 abaixo mostra que o efeito não é significativo. O resultado para o caso base está na primeira

coluna. A segunda apresenta uma simulação para o caso onde $v=0$ a ser realizado. Como se pode notar, não há diferenças significativas entre ambas as colunas.

Figura 3.4

Parâmetros: $r = 0,02$; $\phi = 0,2$; $\alpha = 0,02$; $K = 4$ $\sigma = 0$, $I = 1$; $C = 1$; $E1 = E2 = 0$.

σ	PH	
	vega = 0,2	vega = 0
0,05	1,22	1,22
0,10	1,42	1,42
0,15	1,49	1,49
0,20	1,42	1,49
0,25	1,35	1,49
0,30	1,28	1,28
0,35	1,16	1,11
0,40	0,95	0,90

A forma como se modelou a incerteza do investimento gera dois efeitos: (i) maior incerteza quanto ao custo total da construção deprime o investimento e (ii) como somente investindo aprende-se sobre o custo do investimento, há uma espécie de *learning by doing*, o que incentiva o início do investimento.

Nas simulações realizadas, esses dois efeitos parecem se anular ou, caso um dos dois prevaleça, possui impacto reduzido quando comparado ao tempo de construção e a possibilidade de realizar o investimento em etapas. Este resultado, é outra contribuição da dissertação.

Resultado IV: a volatilidade do custo do investimento, em um modelo que conta apenas com incerteza técnica do custo do investimento, não possui impacto relevante na decisão de investimento da firma.

3.3 Aplicações

Os resultados dos modelos de opções reais podem ser utilizados, entre outras aplicações, para interpretar fenômenos econômicos envolvendo decisões de investimento.

Ilan e Strange (1996) associam os resultados obtidos com indústrias nas quais o período de construção é longo e onde há crônico excesso de capacidade. Desta forma, destacam que empresas de setores que lidam com investimentos de longa duração, como o de construção comercial, geração de energia, papel e celulose, e siderurgia, podem ter maior incentivo a investir. Eles procuram então associar essas características a situações onde ocorre um excesso de capacidade crônica.

O modelo deste artigo sugere também uma explicação para um outro fenômeno econômico. Na segunda metade da década de 90, empresas de setores ligados à tecnologia da informação, a Internet e a telecomunicações passaram por dois eventos importantes: (i) suas ações alcançaram alta valorização nas bolsas de valores e (ii) os setores em questão atraíram grandes volumes de investimentos, que em alguns casos possuíam fraco suporte de uma análise por NPV.

Alguns autores usaram a teoria de opções para explicar o alto valor das ações destas empresas⁵. Os resultados aqui obtidos sugerem que um modelo de opções reais também pode fornecer uma explicação para o fenômeno de se realizar um investimento mesmo diante de fluxos de caixa não atrativos.

A acelerada evolução de novas tecnologias, como, por exemplo, a Internet e a telefonia celular criaram enorme incerteza quanto ao retorno futuro dos empreendimentos nestes setores. Adicionalmente, os investidores mostraram-se menos exigentes quanto à lucratividade imediata dos empreendimentos, o que pode ser interpretado como um aumento no tempo de construção. Pode se argumentar ainda que os investimentos direcionados, por exemplo, para diversas *start-ups* e para compra de concessões para explorar serviços de telecomunicações foram gastos iniciais de investimentos que ocorreriam em diversas etapas.

Como os resultados da seção anterior mostraram, a combinação de maior tempo de construção, investimento seqüencial e aumento da incerteza, presentes no final de década de 90, poderiam ter acelerado os investimentos. Em outros termos, a incerteza quanto aos retornos das novas tecnologias incentivaram os investidores a realizar o investimento em uma série de projetos, mesmo que alguns desses fossem dificilmente justificados por uma análise de NPV.

⁵ Ver Schwartz e Moon (2000)

4. Conclusão

No modelo padrão de opções reais, o investimento é conhecido, imediato e realizado de uma única vez. O efeito de se alterar essas hipóteses vem sendo abordado na literatura econômica. A maior parte dos artigos explora apenas uma destas alternativas. Este artigo contribui e amplia o debate da literatura ao explorar todas essas hipóteses em conjunto, isto é, construir um modelo no qual o investimento é ao mesmo tempo incerto, seqüencial e necessita de tempo de construção.

Com o uso programação dinâmica e avaliação neutra ao risco, obteve-se a equação diferencial para o valor da empresa, nos estágios inativa, pré-operacional e ativa. A equação da empresa pré-operacional, é uma equação diferencial parcial elíptica e demandou a utilização de métodos numéricos.

Os principais resultados da simulação numérica foram:

- Resultado I: com investimento incerto, seqüencial e tempo de construção, o valor de se esperar novas informações diminui e, conseqüentemente, a decisão de investimento se aproxima da regra do NPV;
- Resultado II: o aumento da incerteza pode antecipar o investimento;
- Resultado III: o investimento seqüencial reforça o efeito do tempo de construção sobre as decisões de investimento;
- Resultado IV: diante das demais hipóteses do modelo, a incerteza técnica do custo do investimento não afeta significativamente a decisão de investimento da empresa.

Por último, vale ressaltar novamente que entre esses quatro resultados, dois se destacam como as principais contribuições deste artigo para a literatura econômica: (i) o investimento seqüencial reforça o efeito do tempo de construção, principalmente, quando a volatilidade é alta e; (ii) diante das demais hipóteses, a incerteza técnica do investimento possui pouca influência na decisão de investir da empresa.

5. Apêndice

5.1 Apêndice 1

Este apêndice apresenta a resolução numérica da equação diferencial parcial 3.18, que reescrevemos abaixo junto com as condições de contorno, através de um método de diferenças finitas denominado *projected successive overrelaxation* (Psor).

$$0 = \frac{1}{2} v^2 I K \frac{\partial^2 V_1}{(\partial K)^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 V_1}{(\partial P)^2} - I \frac{\partial V_1}{\partial K} + (\alpha - \phi \sigma) P \frac{\partial V_1}{\partial P} - r V_1 - I \quad (A1)$$

$$V_1(P, 0) = V_2(P) \quad (A2)$$

$$P \rightarrow \infty \Rightarrow V_1(P, K) = V_2(P) e^{-rK/I} - \int_0^{K/I} I e^{-\pi t} dt \quad (A3)$$

$$V_1(P_M, K) = E_1 \quad (A4)$$

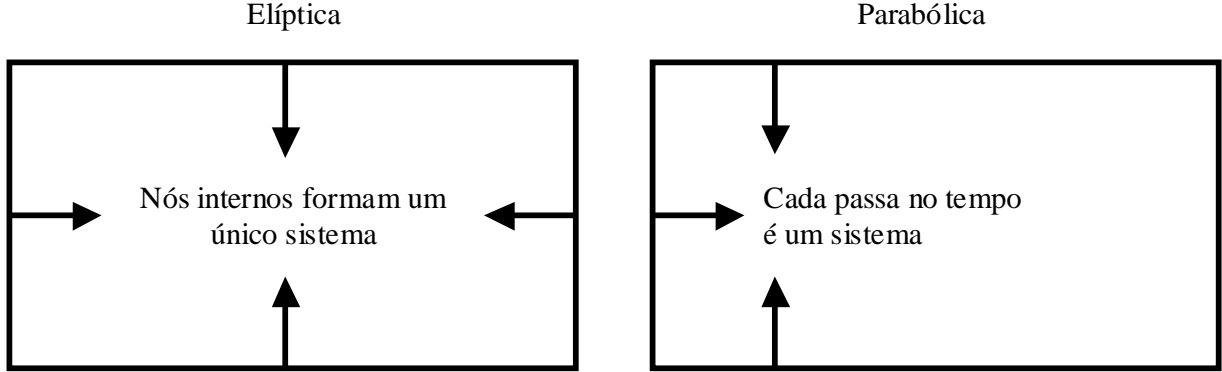
$$\frac{\partial V_1(P_M, K)}{\partial P} = 0 \quad (A5)$$

$$\frac{\partial V_1(P_M, K)}{\partial K} = 0 \quad (A6)$$

A equação (A1) é uma equação parcial elíptica com fronteira livre. Em finanças, as equações diferenciais mais frequentes são do tipo parabólica. Na literatura sobre opções reais geralmente as equações diferenciais são parabólicas e quando são elípticas, uma transformação para uma equação ordinária é possível.

A grande diferença da resolução numérica de uma PDE elíptica é que, uma vez que se define uma grade de valores para as variáveis, todos os pontos internos devem ser resolvidos de uma só vez e não, como no caso das parabólicas, os pontos de um passo no tempo por vez. O problema também exige que seja fornecido quatro condições de fronteira, e não apenas duas e uma de valor inicial como no caso das parabólicas.

Figura A1
Visualização da Solução Numérica de PDEs Elípticas e Parabólicas



O método de diferenças finitas consiste em aproximar o problema contínuo (A1) – (A6) por uma solução discreta. Em primeiro lugar, define-se as seguintes variáveis: $y \equiv \ln P$; $x \equiv 2\sqrt{K}$ e $F(y,x) \equiv V_1(P,K)$. Assim,

$$\frac{\partial V_1}{\partial P} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{1}{P} \quad ; \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial P^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{1}{P^2} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{1}{P^2} \quad (A7)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial K} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{K}} \quad ; \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{1}{K} - \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{1}{K\sqrt{K}} \quad (A8)$$

Substituindo as novas variáveis e as equações (A7) e (A8) no problema (A1) – (A6), e definindo que, $d(x) \equiv (-1 - \frac{v^2}{4}) \frac{2I}{x}$, $e \equiv (\alpha - \phi\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2)$:

$$\frac{1}{2} v^2 I \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + d(x) \frac{\partial F}{\partial x} + e \frac{\partial F}{\partial y} - r F - I = 0 \quad (A9)$$

$$F(y,0) = V_2(e^y) \quad (A10)$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow F(y,x) \rightarrow V_2(e^y) e^{-\frac{rK}{1}} - \int_0^{\frac{K}{1}} I e^{-rt} dt \quad (A11)$$

$$I F(y^*, x) = E_1 \quad (\text{A12})$$

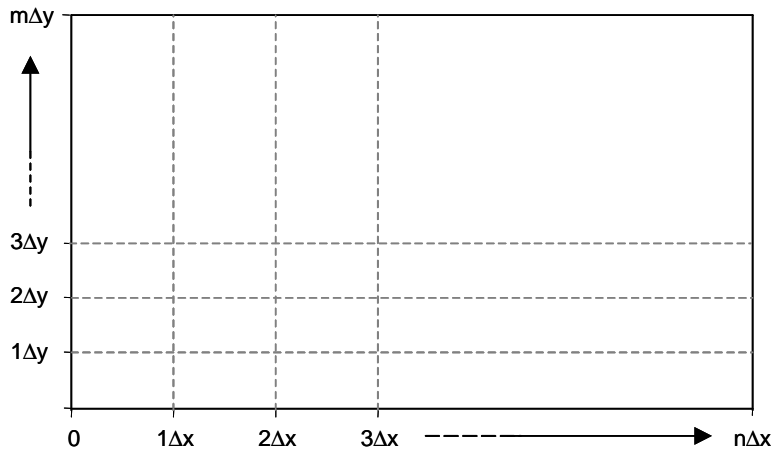
$$\frac{\partial F(Y^*, X)}{\partial Y} = 0 \quad (\text{A13})$$

$$\frac{\partial F(y^*, x)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A14})$$

nas quais y^* representa a fronteira livre.

O próximo passo é discretizar o espaço das variáveis e introduzir uma grade de valores no domínio das variáveis y e x . Por conveniência utiliza-se uma grade uniforme na qual $\Delta y = y_{\max}/m$ e $\Delta x = x_{\max}/n$, conforme mostra a Figura A1 abaixo.

Figura A1



Em seguida aproxima-se o problema (A9) – (A14) na grade acima. Para tanto, utiliza-se as diferenças centrais tanto para as derivadas de segunda ordem como para as de primeira.

$$\partial^2 F / \partial y^2 = (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) / \Delta y^2 \quad (\text{A15})$$

$$\partial^2 F / \partial x^2 = (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) / \Delta x^2 \quad (\text{A16})$$

$$\partial F / \partial y = (U_{i+1,j} - U_{i-1,j}) / 2\Delta y \quad (\text{A17})$$

$$\partial F / \partial x = (U_{i,j+1} - U_{i,j-1}) / 2\Delta x \quad (\text{A18})$$

Substituindo (A15) – (A18) em (A9) – (A14) e definindo $s=\Delta y/\Delta x$

$$U_i^j = \frac{1}{\beta_0} (\Delta y^2 I - \beta_1 U_i^{j+1} - \beta_2 U_i^{j-1} - \beta_3 U_{i+1}^j - \beta_4 U_{i-1}^j) \quad (\text{A19})$$

na qual

$$\beta_0 = -(\sigma^2 + s^2 v^2 I + r \Delta y^2) \quad (\text{A20})$$

$$\beta_1 = s^2 \left(\frac{1}{2} v^2 I + \frac{d(x)}{2} \Delta x \right) \quad (\text{A21})$$

$$\beta_2 = s^2 \left(\frac{1}{2} v^2 I - \frac{d(x)}{2} \Delta x \right) \quad (\text{A22})$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2} \sigma^2 + \frac{e}{2} \Delta y \quad (\text{A23})$$

$$\beta_4 = \frac{1}{2} \sigma^2 - \frac{e}{2} \Delta y \quad (\text{A24})$$

As condições de contorno tornam-se

$$U_i^0 = V_2 (e^{i \Delta y}) \quad (\text{A25})$$

$$U_m^j = V_2 (e^{m \Delta y}) e^{-r \frac{(j \Delta x)^2 / 4}{I}} - \int_0^{\frac{(j \Delta x)^2 / 4}{I}} I e^{-rt} dt \quad (\text{A26})$$

$$U_{i^*}^j = E_1 \quad (\text{A27})$$

$$\frac{U_{i^*}^j - U_{i^*-1}^j}{\Delta y} = 0 \quad (\text{A28})$$

$$\frac{U_{i^*}^{j+1} - U_{i^*}^j}{\Delta x} = 0 \quad (\text{A29})$$

Note que as equações (A27) – (A29) estabelecem a fronteira livre e podem ser atendidas seguindo a metodologia adotada na literatura de finanças para resolver problemas de opções americanas financeiras, isto é, utilizando o *Projected SOR* (ver, por exemplo, Wilmott, 1995 e 1998).

Inicia-se a resolução do problema adotando-se valores iniciais para todos os pontos U_i^j do interior da grade de valores e calculando os valores de U_i^j para $j = 0$ ($\forall i$) e para $i = m$ ($\forall j$) através, respectivamente, de (A25) e (A26), isto é, calcula-se as condições de contorno para $V_1(P,0)$ e $V_1(P, K)$ com $P \rightarrow \infty$. Em seguida, a partir do ponto U_m^0 , “caminha-se” na direção de j e depois na direção de i (ordenação lexicográfica) e calcula-se cada U_i^j usando (A19). A cada passo, testa-se as condições (A27) – (A29) para verificar se atingiu-se a fronteira livre. O procedimento é repetido até que os valores de U_i^j convirjam para a solução.

A figura abaixo apresenta um pseudo-código da rotina implementada no Matlab para a solução do problema.

Figura A3

Pseudo-Código para a solução do problema (A1) – (A6)

U' indica valor “novo” (calculado na iteração atual)
 U indica valor “antigo” (calculado na iteração anterior)

Inicializa variáveis e define constantes

While error > epsilon

For i= 1 to My-1

For j=1 to Mx-1

$$\hat{U}_i^j = \frac{1}{\beta_{ij}^0} (\Delta y^2 I - \beta_{ij}^1 U_i^{j+1} - \beta_{ij}^2 U_i^{j-1} - \beta_{ij}^3 U_{i+1}^j - \beta_{ij}^4 U_{i-1}^j)$$

$$U_i^j = \text{Max} (U_i^j + w(\hat{U}_i^j - U_i^j), E1)$$

end

end

$$\text{error} = \|U' - U\|$$

end

5.2 Apêndice 2

Este apêndice apresenta a solução da equação (3.15). O método envolve uma aproximação discreta das condições de *value matching* e *smooth pasting* (3.10) e (3.11) para determinar A_1 e P_H . Para uma descrição de uma aplicação em um contexto semelhante ao da dissertação, ver Dixit e Pindyck (1994).

Em primeiro lugar, substitui-se (3.15) nas condições e dividi-se (3.10) por (3.11)

$$V_1(P_H, K) = \frac{P_H}{\beta_1} \frac{\partial V_1(P_H, K)}{\partial P} \quad (\text{A30})$$

e realiza-se a transformação de variáveis $y \equiv \ln P$; $x \equiv 2\sqrt{K}$ e $F(y, x) \equiv V_1(P, K)$. Assim

$$F(y^*, x) = \frac{1}{\beta_1} \frac{\partial F_1(y^*, x)}{\partial y} \quad (\text{A31})$$

Em seguida, define-se uma aproximação discreta para a derivada na mesma grade utilizada no Apêndice 1,

$$\frac{\partial F(y^*, x)}{\partial y} = \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{\Delta y} \quad (\text{A32})$$

e discretiza-se (A31) usando (A32)

$$U_i^j = \frac{U_{i+1}^j}{1 + \beta_1 \Delta y} \quad (\text{A33})$$

Com os valores $V_1(P, K)$ obtidos na resolução da equação (3.18), parte-se do ponto U_m^0 e “caminha-se para baixo” na grade, testando a cada ponto a validade de (A33). Em um ambiente discreto, aceita-se que (A33) vale dentro de uma margem de erro, isto é,

$$U_i^j - \frac{U_{i+1}^j}{1 + \beta_1 \Delta y} < \text{eps} \quad (\text{A34})$$

A partir do ponto onde (A34) ocorre, usa-se (3.10) para determinar A_1 e (3.15) para calcular o valor de $V_0(P, K)$ para o intervalo $P < P_H$.

5.3 Apêndice 3

Este apêndice apresenta, com base em Dixit e Pindyck (1994), a intuição econômica das condições de *value matching e smooth pasting*. A demonstração é feita para a equação (2.10) mas pode ser estendida para os demais problemas da dissertação. Vale ressaltar que as demonstrações a seguir não são provas matemáticas rigorosas, mas apenas fornecem a intuição econômica das condições.

Value Matching

A demonstração é feita por absurdo. No problema da empresa inativa dado pela equação de Bellman (2.8), a empresa maximiza o seu valor escolhendo entre permanecer ativa ou inativa. Na solução deste problema, existe uma fronteira P_H que determina o preço acima do qual o valor da empresa ativa, descontado o investimento K , é maior do que o da empresa inativa, e abaixo do qual o inverso ocorre. Assim, para maximizar o seu valor a empresa necessita determinar esse P_H . Para deixar mais claro ainda, P_H deve ser tal que, para $P < P_H$, $V_0(P_H) > V_1(P_H) - K$ e para $P > P_H$, $V_0(P_H) < V_1(P_H) - K$

A condição de *value matching* afirma que, em P_H , $V_0 = V_1 - K$. Primeiro, assumamos que isso não ocorra e $V_0(P_H) < V_1(P_H) - K$. Pela continuidade⁶ das funções V_0 e V_1 , para P ligeiramente inferior à P_H e com dt suficientemente pequeno, continua valendo que $V_0(P) < V_1(P) - K$ o que contradiz o fato de $V_0(P_H) > V_1(P_H) - K$ ocorrer quando $P < P_H$. Por outro lado, se $V_0(P_H) > V_1(P_H) - K$, para P ligeiramente superior à P_H , continua valendo que $V_0(P) > V_1(P) - K$, o que contradiz o fato de $V_0(P_H) < V_1(P_H) - K$ quando $P > P_H$. Portanto, por absurdo, se P_H é a fronteira do problema, então $V_0(P_H) = V_1(P_H) - K$.

Smooth Pasting

Novamente, a demonstração é feita por absurdo. A Figura A4 abaixo auxilia na demonstração.

Primeiro considere que $\partial V_0 / \partial P > \partial V_1 / \partial P$, como na parte (a) da Figura A4. Caso isso ocorra, para a empresa é melhor continuar inativa em P_H , porque se $P > P_H$, ainda ocorrerá que $V_0(P) > V_1(P) - K$, o que contradiz o fato de P_H ser a fronteira.

Se $\partial V_0 / \partial P < \partial V_1 / \partial P$, como na parte (b) da Figura A4, deve-se recorrer às propriedades do movimento de Wiener. Primeiro, considere que, ao invés de exercer a opção de investir como deveria ocorrer em P_H , a empresa adote a seguinte estratégia: não exerce a opção agora e se, no instante dt imediatamente seguinte, ocorrer $dP > 0$, exerce a opção e torna-se uma empresa ativa; e se $dP < 0$, continua inativa. O valor presente esperado desta estratégia, considerando por simplicidade que $K=0$, é dado por

⁶ Apesar de não se mencionar explicitamente hipóteses de continuidade na dissertação, a mesma é considerada ao longo de todo o trabalho.

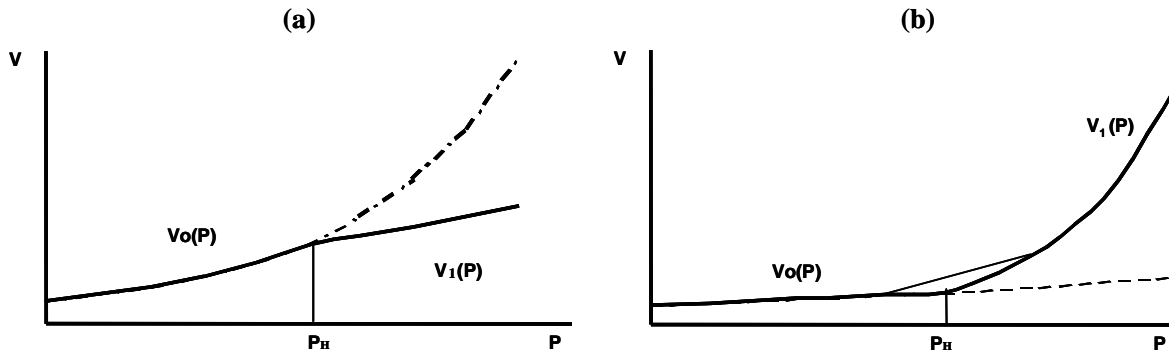
$$(1-rdt) [\phi(dP<0) V_0(P+dP) + \phi(dP>0) V_1(P+dP)] \quad (A35)$$

onde $\phi(dP<0)$ é a probabilidade de dP ser menor que zero e $\phi(dP>0)$ a de ser maior.

Note que, caso se desconsidere que se deve descontar o valor futuro da estratégia para o presente (dado pelo fator $1-rdt$ na equação A35), a estratégia alternativa é superior pois $\partial V_0/\partial P < \partial V_1/\partial P$ (vide a parte (b) da figura). O que garante que a estratégia alternativa é superior mesmo descontando para o presente é o fato de que, para dt suficientemente pequeno, dP é da ordem de \sqrt{dt} , pois o movimento de Wiener é da ordem \sqrt{dt} , enquanto o fator de desconto $(1-rdt)$ é da ordem $dt < \sqrt{dt}$. Portanto, a estratégia de não exercer imediatamente a opção de investir é superior a estratégia de exercer, o que contradiz o fato de P_H ser a fronteira.

Figura A4

Note que a condição de value matching é válida e para facilitar o entendimento assumiu-se que $K=0$



6. Bibliografia

1. Anes, Willian F. 1977. Numerical Methods for Partial Differential Equations.
2. Bjerksund, Petter e Ekern Steiner. 1995. Contingent Claims Evaluation of Mean-Reverting Cash Flows in Shipping. Em Real Options in Capital Investment, ed. Trigeorgis.
3. Barkshi, Charles Cao Gurdip e Chen, Zhiwu. 1997. Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. The Journal of Finance, 2003 – 2049.
4. Brach, Marion e Paxson, Dean. 2001. A Gene to Drug Venture: Poisson Options Analysis. R&D Management 31, 203 – 214.
5. Constandinides, George. 1978. Market Risk Adjustment in Project Valuation. The Journal of Finance, Vol. 33, 603 – 616.
6. Kellogg, David e Charnes, John. 2000. Real Options Valuation for a Biotechnology Company. Financial Analysts Journal, Maio/Junho, 76 – 84.
7. Dias, Marco Antônio Guimarães. 1996. Investimento sob Incerteza em Exploração & Produção de Petróleo. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Industrial da PUC-RJ.
8. Dixit, Avinash. 1989. Entry and Exit Decisions Under Uncertainty. Journal of Political Economy, Vol. 97, 620 – 638.
9. Dixit, Avinash e Pindyck, Robert. 1994. Investment Under Uncertainty.
10. Ilan, Avner e Strange, William. 1996. Investment Lags. The American Economic Review, Vol. 86, 610 – 622.
11. Ilan, Avner e Strange, William. 1998. A Model of Sequential Investment. Journal of Economic Dynamics & Control, Vol. 22, 437 – 463.
12. Lindfield, George e Penny John. 1999. Numerical Methods Using Matlab.
13. Majd, Saman e Pindyck, Robert. 1987. Time to Build, Option Value and Investment Decisions. Journal of Financial Economics, Vol 18, 7-27.
14. McDolnad, Robert e Sigel, Daniel. 1984. Option Pricing When the Underlying Asset Earns a Below the Equilibrium Rate of Return: A Note. The Journal of Finance, pg 261 – 265.
15. McDolnad, Robert e Sigel, Daniel. 1985. Investment and Valuation of Firms When There Is an Option to Shut Down. International Economic Review, pg 331 – 349.
16. Medeiros, Priscilla. 2001. Aplicação de Opções Reais no Imobiliário Residencial com Enfoque na Cidade do Rio de Janeiro. Anais do Primeiro Encontro Brasileiro de Finanças.

17. Morton, K.W. e Mayers, D.F. 1994. Numerical Solution of Partial Differential Equations.
18. Milne, Alistair e Whalley, Elizabeth. 2000. Time to Build, Option Value and Investment Decisions: a Comment. *Journal of Financial Economics*, Vol 56, 325-332.
19. Sahlaman, William A. 1990. The Structure and Governance of Venture-Capital Organizations. *Journal of Financial Economic*. Vol. 27, 473-521.
20. Sarkar, Sudipto. 2000. On the Investment-Uncertainty Relationship in a Real Options Model. *Journal of Economic Dynamics & Control* , Vol. 24, 219 –225.
21. Schwartz, Eduardo e Moon, Mark. 2000. Rational Pricing of Internet Companies. Association for Investment Management and Research.
22. Sykes, Hollister. 2002. Real Options for Real Ventures. Working Paper - Technology Venture Management.
23. Thomas, James William. 1995. Numerical Partial Differential Equations: Conservation Laws and Elliptic Equations.
24. Trigeorgis, Lenos.1999. Real Options.
25. Willner, Ram. 1995. Valuing Start-up Venture Growth Option. Em *Real Options in Capital Investment*, ed. Trigeorgis.
26. Wilmott, Paul. 1995. *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*.
27. Wilmott, Paul. 1998. *Derivatives*.