

# Demanda e desemprego no médio prazo\*

Jorge Eduardo de Castro Soromenho<sup>†</sup>      Jaylson Jair da Silveira<sup>‡</sup>

Janeiro de 2006

## 1 Introdução

Na macroeconomia moderna, as políticas fiscal e monetária têm um papel bastante limitado na determinação do nível de emprego. A elas atribuem-se apenas efeitos de curto prazo. Assim, se bem administradas, essas políticas podem somente acelerar a tendência da economia a se auto-equilibrar na taxa natural de desemprego. Esse consenso é fruto da controvérsia que marcou a história da macroeconomia no século passado a respeito das causas do desemprego. No intuito de esclarecer a motivação do modelo apresentado neste artigo, convém recordar, ainda que de forma breve e impressionista, as principais etapas desse debate.<sup>1</sup>

A controvérsia que se seguiu à publicação da Teoria Geral pode ser dividida em duas fases, que se distinguem pelos contextos metodológicos nos quais se travam as discussões. Na primeira fase, o contexto é eminentemente estático : a questão central é identificar qual seria a oferta de trabalho adequada à teoria de Keynes. Na segunda fase, o desemprego passa a ser concebido como uma situação de desequilíbrio em modelos dinâmicos.

O clássico artigo de Modigliani de 1944 constitui um arquétipo da primeira fase. Modigliani propôs uma oferta de trabalho que, a depender do valor de alguns parâmetros, representava a oferta clássica ou a keynesiana. Na versão clássica, a quantidade ofertada de trabalho dependia do salário real. Na keynesiana, o salário nominal era rígido se a quantidade de trabalho fosse inferior à de pleno emprego ; a partir desse nível, vigorava a oferta clássica. Em seguida, concebeu modelos que associavam essas ofertas com a IS e diferentes especificações do equilíbrio do mercado de ativos. Tornava-se possível não só sintetizar as discussões travadas até então em torno da Teoria Geral como também identificar a condição necessária e suficiente para a persistência do desemprego involuntário. Modigliani concluía

---

\*Texto provisório e incompleto.

<sup>†</sup>FEA -USP. jecs@usp.br

<sup>‡</sup>UNESP - Araraquara. jaylson@fclar.unesp.br

<sup>1</sup>Para uma apresentação da história do modelo IS-LM, ver Darity and Young (1995). Os principais aspectos do debate foram resumidos por James Tobin em diversos textos (1993, 1994, 1997). Os argumentos sinteticamente expostos nesta introdução são discutidos em detalhe em Soromenho (2003).

que, com exceção dos casos da armadilha da liquidez e da perfeita inelasticidade da demanda agregada em relação aos juros, o desemprego involuntário exigia salários nominais rígidos.<sup>2</sup>

No entanto, quando a questão da flexibilidade dos salários é abordada desse modo, tem-se a impressão de que o problema não está sendo discutido no contexto adequado, pois a rigidez é simplesmente postulada. Eliminar a exogeneidade do salário, acrescentando a oferta clássica de trabalho, também não constitui uma alternativa válida, visto que um sistema de equações que admite apenas um determinado valor como solução para uma variável endógena é simplesmente inconsistente se for suposto que essa variável assume outro valor. A análise estática não é o ambiente adequado, portanto, para responder à questão “o que acontece se o valor não for o de equilíbrio?”, visto que essa possibilidade está descartada pelo próprio caráter modelo. Na literatura moderna, a percepção dessa inadequação traduz-se na distinção entre flexibilidade e perfeita flexibilidade de salários. No segundo caso, diz-se que o desemprego é eliminado por definição (p. ex. Hahn e Solow, 1997, p. 49) ou “de modo quase tautológico” (Tobin, 1997, p. 20).

A segunda fase do debate decorre das discussões travadas em torno do efeito riqueza. Como se sabe, introdução da riqueza na demanda agregada – os efeitos Pigou-Haberler-Patinkin – objetivaram, primordialmente, restaurar as propriedades de auto-equilíbrio das economias capitalistas no pleno emprego mesmo no caso da armadilha da liquidez. Porém, em decorrência da natureza dinâmica desses efeitos, a discussão deslocou-se para o contexto metodológico que se fazia necessário. Isto levou a uma nova percepção da natureza do desemprego, como relatou Harry Johnson :

‘unemployment equilibrium’ has to be reinterpreted as a disequilibrium situation in which dynamic adjustment is proceeding very slowly; this is the interpretation of mathematical economists such as Leontief, Patinkin, and Clower, and is, I believe, a fair modern translation of Keynes’s short period equilibrium technique. (Johnson, 1961, p. 12-13)

Do ponto de vista teórico, no entanto, os efeitos da variação da riqueza no consumo não são isentos de ambigüidade. É necessário, como se sabe, distinguir entre riqueza interna e externa. Em relação à riqueza interna, a deflação pode favorecer credores, cuja propensão a consumir é menor do que a dos devedores, diminuindo, portanto, o consumo agregado. Restaria, então, como esperança de restaurar as propriedades de auto-equilíbrio no pleno emprego, o efeito da riqueza externa sobre o consumo. Sob o prisma empírico, o efeito riqueza revelou-se irrelevante. Segundo Tobin (1993 : 87), o próprio Patinkin assinalou que, embora o valor da riqueza privada líquida tenha aumentado 46 por cento de 1929 a 1932, a

---

<sup>2</sup>De fato, por um lado, independentemente da especificação da demanda de moeda, a hipótese de salários rígidos permitia caracterizar o desemprego como situação de equilíbrio. Assim, essa hipótese era suficiente para garantir o desemprego. Por outro, se os salários fossem flexíveis não poderia existir desemprego. Logo, a rigidez salarial era condição necessária para existência de sub ocupação da mão-de-obra. A teoria da preferência pela liquidez era irrelevante. O desemprego involuntário devia-se única e exclusivamente à rigidez dos salários nominais.

renda real caiu 40 por cento.<sup>3</sup> Apesar dessas evidências, o efeito riqueza foi considerado por muitos um argumento teórico irrefutável em favor da tese clássica – como, aliás, o releva a citação da nota anterior. Por que motivos? Pode-se, talvez, sintetizar essa tese da seguinte forma : se os salários continuassem a cair, em virtude do excesso de oferta de trabalho, os preços reduzir-se-iam, e ,em algum momento, a riqueza real externa seria tão grande que, a despeito dos efeitos adversos relativos à riqueza interna, a demanda agregada deveria elevar-se, restaurando o pleno emprego.

Pressuposto nesse raciocínio estava, evidentemente, a hipótese que salários continuariam a cair, e com eles os preços, enquanto houvesse excesso de oferta no mercado de trabalho. Mas, se esse não fosse o caso, validar-se-ia novamente o argumento de que a condição suficiente e necessária era a rigidez nominal. De qualquer modo, prevalecia, então, a tese da centralidade da hipótese de rigidez nominal e a discussão deslocou-se para os motivos que poderiam justificá-la. Como se sabe, explicar a rigidez passou a constituir parte importante da agenda de pesquisas dos novos keynesianos.

Em suma, o brevíssimo resumo apresentado acima permite identificar um ponto importante para compreender a controvérsia. Na primeira fase, o contexto metodológico era inadequado para a discussão do tema : no âmbito estático, flexibilidade de salários só pode significar que o excesso de oferta no mercado de trabalho é nulo, i. e., vigora o pleno emprego por definição. Na segunda fase, o debate desenvolveu-se no contexto dinâmico que se fazia necessário, porém a própria especificação dos modelos dinâmicos tinha por referência o conceito de equilíbrio clássico. Ou seja, supunha-se que a dinâmica de salários nominais podia ser descrita por uma equação diferencial por meio da qual se impunha que, se existisse excesso de oferta, o preço da mercadoria em questão deveria diminuir. Segue-se, então, que o único valor estacionário para o salário nominal é aquele para o qual o salário real implica excesso de oferta nulo. Pode ser que a economia convirja apenas de modo muito lento para esse valor estacionário, ou mesmo que haja inicialmente um aprofundamento da recessão, mas, aparentemente, o efeito riqueza garantiria que o resultado final seria o de pleno emprego.

Assim, embora muito tenha sido suposto a respeito da dinâmica global do sistema com base em análises que eram apenas locais,<sup>4</sup> pode-se afirmar que equilíbrio de médio prazo e desemprego keynesiano eram incompatíveis. O máximo que se podia aspirar era demonstrar que a estabilidade do único equilíbrio do modelo era apenas uma propriedade local e que

---

<sup>3</sup>No mesmo espírito, Greenwald e Stiglitz destacam que :

The enormous attention that the real balance effect has received over the years hardly speaks well for the profession. Quantitatively, it is surely an nth order effect ; one calculation put it that, even at the fastest rate at which prices fell in the Great Depression, it would take more than two centuries to restore the economy to full employment. And in the short run even its sign is ambiguous, as intertemporal substitution effects may (depending on expectations) more than offset the wealth effects. (Greenwald e Stiglitz,1993 : 36)

<sup>4</sup>Ver, a respeito, Flasche, Reiner e Semmler (1997).

a flexibilidade dos salários e preços poderia, na verdade, desestabilizar a economia, como havia sugerido o próprio Keynes.

A adoção de concepções não atomistas do mercado de trabalho pouco alteraram esse quadro. Por exemplo, no conhecido livro-texto de Blanchard (1999) flexibilidade imperfeita de salários e expectativas adaptativas são suficientes para assegurar que, no médio prazo, vigora uma taxa natural de desemprego redefinida de modo a ser compatível com a presença de sindicatos. As políticas fiscal e monetária revelam-se, então, ineficazes para aumentar permanentemente o nível de emprego. Coerentemente, a macroeconomia de inspiração keynesiana passou a ser organizada em torno do conceito de taxa natural de desemprego e as razões do desemprego persistente foram atribuídas aos determinantes dessa taxa.

Frente a esses resultados, cabe perguntar, no entanto, se esse conceito de equilíbrio, que orienta a especificação da própria equação dinâmica e que exclui o desemprego keynesiano como um possível estado estacionário para o qual possa convergir a dinâmica macroeconômica, é conveniente para discutir o fenômeno em questão. De um ponto de vista metodológico, talvez seja proveitoso conceber um modelo no qual o desemprego keynesiano e o pleno emprego fossem ambos estados estacionários e, em seguida, examinar em que circunstâncias a economia converge para um ou outro equilíbrio. Evidentemente, isto pressupõe a redefinição do próprio conceito de equilíbrio.

A conjectura que orienta este artigo é a de que o conceito de equilíbrio evolucionário pode vir a se revelar mais adequado do que o conceito tradicional para apreender a idéia de desemprego involuntário num contexto dinâmico.<sup>5</sup> Dois motivos concorrem para isso. Primeiro, modelos de jogos evolucionários apresentam, normalmente, múltiplos equilíbrios. Abre-se o espaço, portanto, para conceber estados de equilíbrio de médio prazo compatíveis com desemprego e, conseqüentemente, restaurar a importância das políticas fiscal e monetária como determinantes do nível de ocupação da mão-de-obra. Segundo, os equilíbrios nos modelos evolucionários são selecionados por meio de dinâmicas de replicação, as quais podem ser microfundadas de diferentes formas, que vão desde comportamentos de imitação simples a processos de aprendizagem social (Ponti, 2000, p. 189). Isto permite superar as objeções justamente feitas aos processos de tâtonnement sintetizadas, há muitos anos, por Koopmans :

The various assumptions that have been used to describe the adjustment of price or quantity in a commodity market clearly show their parentage in the laws of the physical sciences. If, for instance, the net rate of increase in price is assumed to be proportional to the excess of demand over supply, whose behavior is thereby expressed? And how is that behavior motivated? (Koopmans, 1957 : 179)

---

<sup>5</sup>O artigo insere-se na literatura que procura aplicar a teoria dos jogos evolucionários à análise de questões econômicas relevantes do ponto de vista teórico ou aplicado. Alguns trabalhos nacionais representativos dessa literatura são : Prado (1999) ; Prado (2001) ; Soromenho, Kadota e Prado (2001) ; Bonomo, Carrasco e Moreira (2003) ; Prado, Kadota e Soromenho (2003) ; Silveira (2003) ; Silveira e Sanson (2004).

A utilização desse conceito de equilíbrio permite, portanto, redefinir a flexibilidade de salários que, no contexto evolucionário, significa permitir que os agentes escolham, conforme suas conveniências explicitamente modeladas, flexibilizar o salário ou não.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na próxima seção, modificamos a estrutura típica dos modelos macroeconômicos de curto prazo, na qual historicamente se travou a controvérsia sobre o desemprego keynesiano, de modo que ela torne-se compatível com o conceito de equilíbrio evolucionário. Ao fazê-lo, procuramos alterar o mínimo possível essa estrutura tradicional. Em seguida, discutimos as decisões dos trabalhadores e delas derivamos as equações dinâmicas do modelo. Por fim, analisamos as propriedades de médio prazo do modelo macroevolucionário. Nessa seção, investigamos a estrutura topológica do plano de fases da dinâmica evolucionária no intuito de demonstrar que políticas keynesianas de controle da demanda agregada podem não só deslocar a economia de uma bacia de atração para outra, mas também criar e destruir equilíbrios macroeconômicos. Na linguagem dos sistemas dinâmicos, demonstramos que as políticas keynesianas de controle da demanda agregada geram bifurcações, pois afetam a parametrização da dinâmica evolucionária.

## 2 O curto prazo

### 2.1 O modelo

Considere uma economia composta de  $h$  firmas, que produzem um único bem  $Y$ , e  $N$  trabalhadores ( $N > h$ ). A produção de cada firma  $j$  é uma função,  $f : R_+ \rightarrow R_+$ , do número de trabalhadores empregados,  $N_j$ , e, além das hipóteses usuais, supomos que o produto e a produtividade marginal são limitadas :

$$f(0) = 0; \sup f = b > 0; f'(N_j) \geq 0; 0 < f'(0) = a < \infty; \lim_{N_j \rightarrow \infty} f'(N_j) = 0; \text{ e } f''(N_j) < 0, \quad (2.1)$$

para qualquer firma  $j = 1, 2, \dots, h$ .

Admita que exista um mercado de trabalho interno a cada firma onde se negociam salários nominais no início do período de produção. Essas negociações dão-se entre os gestores da empresa e o colegiado de trabalhadores. Em cada firma, o colegiado pode adotar apenas duas estratégias ( $i = 1, 2$ ) : flexibiliza o salário nominal,  $w_1$ , ou exige um específico salário nominal fixo  $w_2$ . As firmas podem ser divididas, então, em dois grupos ou setores conforme seja a estratégia adotada por seus trabalhadores. O setor 1, será denominado de clássico ou flexível; e o setor 2 será dito keynesiano ou rígido. Sejam  $N_i$  e  $h_i$  o número de trabalhadores e o de firmas do tipo  $i$  que compõem o setor  $i$ . Dentro de cada grupo, supomos que as firmas são perfeitamente homogêneas, isto é, empregam o mesmo número de trabalhadores e pagam salários nominais iguais, ou seja,  $N_j = N_i/h_i$  e  $w_j = w_i$  para toda firma  $j = 1, 2, \dots, h_i$  do tipo  $i = 1, 2$ .

No setor clássico, supomos que os trabalhadores, ao flexibilizarem seus salários, garantem a manutenção dos seus empregos, mas sujeitam-se a um salário real  $\omega_1$  que depende do total de trabalhadores que aceitam  $w_1$ . Ou seja,  $N_1$  compreende não só os trabalhadores que participaram das negociações salariais no início do período mas também quaisquer outros que aceitem aquele salário nominal. O processo pelo qual se determina esse salário nominal é deixado em aberto. Assumimos, simplesmente, que ele opera como no tradicional modelo clássico. Assim,  $N_1$  é a quantidade ofertada de trabalho e a produtividade marginal é igual ao salário real  $\omega_1$ .

No setor keynesiano, os trabalhadores podem perder seus postos, pois nada assegura que o valor do produto marginal correspondente ao salário real  $\omega_2 = w_2/p$  induza as firmas a empregarem todos os que optaram por essa estratégia. Dessa forma, ao contrário do que ocorre no primeiro caso,  $N_2$  pode ser menor do que número de trabalhadores participantes das negociações internas.

Para completar a descrição das populações, seja  $U$  o número de desempregados. Por construção, um trabalhador desempregado ou já estava nessa situação no período anterior, e decidiu não procurar trabalho no setor de salários flexíveis na transição entre períodos, ou estava empregado no setor de salários rígidos e perdeu a sua ocupação no atual período.

Considere as seguintes definições :  $n_1 = N_1/N$ ;  $n_2 = N_2/N$ ;  $u = U/N$ ;  $\alpha = h_1/h$ ; e  $c = N/h$ .<sup>6</sup> O número de trabalhadores empregados em cada tipo de firma pode ser expresso, então, em termos dessas participações das populações de trabalhadores e firmas :  $N_1/h_1 = c n_1/\alpha$  e  $N_2/h_2 = c n_2/(1 - \alpha)$ . Como o produto do setor  $i$  é igual ao número de empresas do tipo  $i$  multiplicado pela produção por firma,  $h_i y_i$ , as produções de uma firma do tipo 1 e de uma do tipo 2, normalizadas pelo número total de firmas da economia, são, respectivamente :

$$y_1 = \alpha f\left(\frac{c n_1}{\alpha}\right); \text{ e } y_2 = (1 - \alpha) f\left(\frac{c n_2}{1 - \alpha}\right). \quad (2.2)$$

No intuito de identificar o domínio dessas funções de produção, considere os seguintes conjuntos :

$$\Omega_i = \{(\alpha, n_i) \in R^2 : 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq n_i \leq 1\}, \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

Visto que a existência de firmas em um setor depende da presença de trabalhadores nesse mesmo setor, se  $\alpha = 0$  ( $\alpha = 1$ ), então,  $n_1$  ( $n_2$ ) também deve ser nulo. Assim, na nossa economia os vetores  $(\alpha, n_i)$  economicamente relevantes devem pertencer ao conjunto  $\text{int } \Omega_i \cup \{(0, 0), (1, 1)\}$ . Não obstante, a análise é facilitada se definirmos as funções de produção nos conjuntos  $\Omega_i$ . Nesse sentido, observe que se  $\alpha = 0$ , a produção do setor 1 é uma indeterminação matemática, e o mesmo ocorre para o setor 2 quando  $\alpha = 1$ . No entanto, para  $i = 1, 2$  e qualquer  $(\alpha, n_i) \in \Omega_i$ , tal que  $i - 1 - \alpha \neq 0$  e  $\bar{n}_i \in [0, 1]$ , temos que :

---

<sup>6</sup> A restrição natural dessa economia é, evidentemente :  $n_1 + n_2 + u = 1$ .

$$\lim_{(\alpha, n_1) \rightarrow (0, \bar{n}_1)} \alpha f\left(\frac{c n_1}{\alpha}\right) = 0; \text{ e } \lim_{(\alpha, n_2) \rightarrow (1, \bar{n}_2)} (1 - \alpha) f\left(\frac{c n_2}{1 - \alpha}\right) = 0. \quad (2.4)$$

Com efeito, seja a seqüência  $x_1^s = (\alpha^s, n_1^s) \in \Omega_1, \alpha^s \neq 0$  e  $s \in N$ . Como, por hipótese,  $f(0) = 0$  e  $\sup f = b$ , temos que existe uma vizinhança em torno de  $(0, \bar{n}_1)$  para a qual  $f(cn_1^s/\alpha^s) \in [0, b]$  quando  $\lim_{s \rightarrow \infty} x_1^s = (0, \bar{n}_1)$ . Logo,  $\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha^s f(cn_1^s/\alpha^s) = 0$  para qualquer seqüência  $x_1^s$  tal que  $\lim_{s \rightarrow \infty} x_1^s = (0, \bar{n}_1)$ . Argumento análogo vale para o segundo limite.

Podemos, então, definir as seguintes funções contínuas em  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  :

$$y_1(\alpha, n_1) = \begin{cases} \alpha f\left(\frac{c n_1}{\alpha}\right), & \text{se } (\alpha, n_1) \in \Omega_1 \text{ e } \alpha > 0 \\ 0, & \text{se } (\alpha, n_1) \in \Omega_1 \text{ e } \alpha = 0 \end{cases}; \text{ e} \quad (2.5)$$

$$y_2(\alpha, n_2) = \begin{cases} (1 - \alpha) f\left(\frac{c n_2}{1 - \alpha}\right), & \text{se } (\alpha, n_2) \in \Omega_2 \text{ e } \alpha < 1 \\ 0, & \text{se } (\alpha, n_2) \in \Omega_2 \text{ e } \alpha = 1 \end{cases}. \quad (2.6)$$

A produção agregada máxima da economia depende não apenas da quantidade total de trabalhadores, mas também – em decorrência da hipótese de rendimentos decrescentes – da distribuição de trabalhadores e empresas entre os dois setores. Se inexistir desemprego,  $u = 0$ , ou seja,  $n_2 = 1 - n_1$ , então a produção agregada de pleno emprego normalizada pelo número total de firmas é :

$$y(\alpha, n_1) = y_1(\alpha, n_1) + y_2(\alpha, 1 - n_1). \quad (2.7)$$

Esta função é de classe  $C^2$  e côncava em  $\text{int } \Omega_1$ . Esta última propriedade decorre do fato de que no conjunto aberto e convexo  $\text{int } \Omega_1$  a matriz Hessiana  $D^2y(\alpha, n_1)$  da função  $y(\alpha, n_1)$  é semidefinida negativa para todo  $(\alpha, n_1) \in \text{int } \Omega_1$ , pois os sinais dos menores principais são :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = \frac{c^2 n_1^2 f''\left(\frac{c n_1}{\alpha}\right)}{\alpha^3} + \frac{c^2 (1 - n_1)^2 f''\left(\frac{c(1 - n_1)}{1 - \alpha}\right)}{(1 - \alpha)^3} < 0; \text{ e} \quad (2.8)$$

$$|D^2y(\alpha, n_1)| = -\frac{c^4 (n_1 - \alpha)^2 f''\left(\frac{c(1 - n_1)}{1 - \alpha}\right) f''\left(\frac{c n_1}{\alpha}\right)}{(1 - \alpha)^3 \alpha^3} \geq 0. \quad (2.9)$$

Observe que se  $\alpha = n_1$ ,  $|D^2y(\alpha, n_1)| = 0$ . Dada a concavidade da função  $y(\alpha, n_1)$  em  $\text{int } \Omega_1$ , a condição necessária e suficiente para um máximo em  $\text{int } \Omega_1$  é  $Dy(\alpha, n_1) = 0$ , ou seja :

$$\frac{\partial y}{\partial n_1} = c f'\left(\frac{c n_1}{\alpha}\right) - c f'\left(\frac{c(1 - n_1)}{1 - \alpha}\right) = 0; \text{ e} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = f\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - \frac{cn_1}{\alpha} f'\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - f\left(\frac{c(1-n_1)}{1-\alpha}\right) + \frac{c(1-n_1)}{1-\alpha} f'\left(\frac{c(1-n_1)}{1-\alpha}\right) = 0. \quad (2.11)$$

É fácil constatar que qualquer  $\alpha$  igual a  $n_1$  resolve o sistema e, portanto, o produto máximo é  $y(\alpha, n_1) = \alpha f(c) + (1-\alpha)f(c) = f(c)$ . O resultado mantém-se ao considerarmos o domínio fechado  $\Omega_1$ , pois  $y(\alpha, n_1)$  é contínua, visto que é soma de funções contínuas, e, se  $\alpha = n_1$  e um dos setores é extinto, o produto máximo também é igual a  $f(c)$ .

As remunerações pagas nos setores são iguais às respectivas produtividades marginais:<sup>7</sup>

$$\omega_1 = f'\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right); \quad \omega_2 = f'\left(\frac{cn_2}{1-\alpha}\right). \quad (2.12)$$

A produtividade marginal das firmas do tipo 2,  $f'(cn_2/(1-\alpha))$ , é função continuamente diferenciável e estritamente decrescente no intervalo  $[0, \infty)$ . Definindo  $g(\omega_2)$  como a inversa da segunda equação de (2.12), temos:

$$n_2 = \frac{1-\alpha}{c} g(\omega_2), \quad \omega_2 \in (0, a]; \quad g'(\omega_2) = 1/f''(g(\omega_2)) < 0. \quad (2.13)$$

Substituindo em (2.6), obtemos:

$$y_2(\alpha, \omega_2) = \begin{cases} (1-\alpha)f(g(\omega_2)), & \text{se } \omega_2 \in (0, a] \text{ e } \alpha \in [0, 1) \\ 0, & \text{se } \omega_2 \in (0, a] \text{ e } \alpha = 1 \end{cases}. \quad (2.14)$$

Observe que essa função é contínua no domínio especificado, pois, como  $f(g(\omega_2))$  é limitada, para qualquer seqüência  $x^s = (\alpha^s, \omega_2^s) \in \{(\alpha, \omega_2) \in R_+^2 : 0 < \omega_2 \leq a, \alpha < 1\}$ ,  $s \in N$ , tal que  $\lim_{s \rightarrow \infty} x^s = (1, \bar{\omega}_2)$ ,  $\bar{\omega}_2 \in (0, a]$ , o limite de  $(1-\alpha^s)f(g(\omega_2^s))$  é igual a zero.

Para manter o modelo o mais simples possível, admita que a demanda agregada  $y^d$  (igualmente normalizada pelo número total de firmas) depende negativamente do nível de preços  $p$  (como forma sintética de incorporar o efeito riqueza e o efeito Keynes) e positivamente de parâmetro  $A \in R_+$ , que resume todos os outros elementos que possam influenciar o dispêndio global. Como  $p = w_2/\omega_2$ , aumentos do salário real do setor rígido elevam o dispêndio agregado. Supomos, ademais, que se o preço tende a infinito, a demanda é nula, sendo positiva nos demais casos. Seja, então,

$$y^d = D(\omega_2, A); \quad D(0, A) = 0; \quad D(\omega_2, A) \geq 0 \text{ para } \omega_2 > 0; \quad D_1 \equiv \frac{\partial D}{\partial \omega_2} < 0; \quad D_2 \equiv \frac{\partial D}{\partial A} > 0. \quad (2.15)$$

---

<sup>7</sup>Observe que as hipóteses sobre a função de produção asseguram que quaisquer que sejam as seqüências  $x_i^s = (\alpha^s, n_i^s) \in \Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ , tais que  $\lim_{s \rightarrow \infty} x_1^s = (0, 0)$  e  $\lim_{s \rightarrow \infty} x_2^s = (1, 0)$ , existem vizinhanças em torno de  $(0, 0)$  e de  $(1, 0)$  tais que  $f'(\cdot) \in [0, a]$ , ou seja, a função é limitada quando  $(\alpha, n_i)$  tende  $(0, 0)$  no primeiro caso e  $(1, 0)$  no segundo.

Admita, além disso, como hipótese meramente conveniente de um ponto de vista técnico, que a demanda seja maior ou igual ao produto máximo sempre que  $\omega_2$  assume seu valor máximo, ou seja :

$$D(a, A) \geq f(c). \quad (2.16)$$

Por fim, suponha que o mercado de produto está sempre em equilíbrio. No curto prazo, o modelo resume-se às seguintes equações :

$$\omega_1 = f' \left( \frac{cn_1}{\alpha} \right); \quad (2.17)$$

$$n_2 = \frac{1-\alpha}{c} g(\omega_2); \text{ e} \quad (2.18)$$

$$D(\omega_2, A) - y_1(\alpha, n_1) - y_2(\alpha, \omega_2) = 0. \quad (2.19)$$

Após terem sido realizadas as negociações, na transição entre períodos, o número de firmas em cada grupo e o de trabalhadores que se dispõem a trabalhar ao salário flexível estão determinados. Assim, no curto prazo  $\alpha$  e  $n_1$  são variáveis exógenas. O modelo compreende, então, três equações e três incógnitas,  $\omega_1, \omega_2$  e  $n_2$ . A condição de maximização de lucro (2.17) das firmas do tipo 1 é suficiente para determinar o salário real do setor flexível  $\omega_1^*$ , o qual independe, portanto, do parâmetro  $A$ . A condição de equilíbrio no mercado de bens (2.19) determina o salário real do setor rígido  $\omega_2^*$  e, identificado este, a condição de maximização de lucro (2.18) das firmas do tipo 2 determina o nível de emprego do setor keynesiano  $n_2^*$ .

## 2.2 Os equilíbrios do curto prazo

Para atender aos nossos propósitos, o modelo deve compreender três tipos de equilíbrios associados a diferentes valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $n_1$ . Primeiro, um equilíbrio keynesiano puro que se caracteriza pela existência apenas do setor rígido :  $(\alpha, n_1) = (0, 0)$ . Segundo, um equilíbrio, que denominaremos de estratégia mista, no qual os dois setores da economia coexistem :  $(\alpha, n_1) \in \text{int } \Omega_1$ . Por último, um equilíbrio clássico puro que se caracteriza pela existência apenas do setor flexível, no qual todos os salários são perfeitamente flexíveis e o pleno emprego vigora por definição :  $(\alpha, n_1) = (1, 1)$ . A seguir, discutimos como o modelo comporta esses três casos.

Considere a função de excesso de demanda do mercado de produto :

$$E(\omega_2, \alpha, n_1, A) = D(\omega_2, A) - y_1(\alpha, n_1) - y_2(\alpha, \omega_2). \quad (2.20)$$

Essa função é contínua no domínio  $(0, a] \times \Omega_1 \times R_+$ , pois é soma de funções contínuas. De (2.14) e (2.15) segue que

$$\lim_{\omega_2 \rightarrow 0} E(\omega_2, \alpha, n_1, A) = -\alpha f(c n_1/\alpha) - (1 - \alpha)b < 0. \quad (2.21)$$

Como a produção agregada de pleno emprego, ou seja, o produto máximo é igual a  $f(c)$ , a hipótese (2.16) é suficiente para assegurar que  $E(a, \alpha, n_1, A) = D(a, A) - \alpha f(c n_1/\alpha) \geq f(c) - \alpha f(c n_1/\alpha) \geq 0$ . Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe um  $\omega_2^* \in (0, a]$  tal que  $E(\omega_2^*, \alpha, n_1, A) = 0$ . Além disso, a função de excesso de demanda é estritamente crescente com relação ao salário real no setor 2, pois para todo  $\omega_2 \in (0, a]$  :

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_2} = D_1 - (1 - \alpha)\omega_2 g'(\omega_2) > 0. \quad (2.22)$$

Assim, para cada vetor  $(\alpha, n_1, A) \in \Omega_1 \times R_+$  existe um único  $\omega_2^*$  ao qual o excesso de demanda é nulo, ou seja, existe uma função  $\phi : \Omega_1 \times R_+ \rightarrow (0, a] \subset R$  tal que :

$$\omega_2^* = \phi(\alpha, n_1, A). \quad (2.23)$$

Como a função de excesso de demanda (2.20) possui derivadas parciais contínuas para todo  $(\alpha, n_1, A) \in \Omega_1 \times R_+$  tal que  $\alpha \neq 0$ , segue-se, pelo teorema da função implícita, que  $\phi(\alpha, n_1, A)$  é de classe  $C^1$  para todo  $(\alpha, n_1, A) \in \Omega_1 \times R_+$  tal que  $\alpha \neq 0$ . No apêndice demonstramos que a continuidade dessa função se estende a pontos  $(\alpha, n_1, A)$  do domínio tais que  $\alpha = 0$ .

Substituindo  $\omega_2^*$  em (2.18), identificamos o nível de emprego de equilíbrio de curto prazo :

$$n_2^* = \frac{1 - \alpha}{c} g(\phi(\alpha, n_1, A)). \quad (2.24)$$

Em suma, para cada vetor  $(\alpha, n_1, A) \in \Omega_1 \times R_+$ , pelas equações (2.17), (2.23) e (2.24) determina-se um único vetor  $(\omega_1^*, \omega_2^*, n_2^*)$  que define o equilíbrio de curto prazo.

Os seguintes resultados de análise estática comparativa serão utilizados na análise do médio prazo :

$$\phi_\alpha \equiv \frac{\partial \omega_2^*}{\partial \alpha} = \frac{f\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - \frac{cn_1}{\alpha} f'\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - f(g(\omega_2^*))}{D_1 - (1 - \alpha)\omega_2^* g'(\omega_2^*)}; \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial n_2^*}{\partial \alpha} = \frac{1}{c} [(1 - \alpha) g'(\omega_2^*) \phi_\alpha - g(\omega_2^*)]; \quad (2.26)$$

$$\phi_{n_1} \equiv \frac{\partial \omega_2^*}{\partial n_1} = \frac{c f'\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right)}{D_1 - (1 - \alpha)\omega_2^* g'(\omega_2^*)} > 0; \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial n_2^*}{\partial n_1} = \frac{1 - \alpha}{c} g'(\omega_2^*) \phi_{n_1} < 0; \quad (2.28)$$

$$\phi_A \equiv \frac{\partial \omega_2^*}{\partial A} = -\frac{D_2}{D_1 - (1 - \alpha) \omega_2^* g'(\omega_2^*)} < 0; \text{ e} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial n_2^*}{\partial A} = \frac{1 - \alpha}{c} g'(\omega_2^*) \phi_A > 0. \quad (2.30)$$

As soluções obtidas para o curto prazo requerem algumas observações. Primeiro, o equilíbrio keynesiano puro exige que  $\alpha$  seja nulo. Neste caso particular, a função de excesso de demanda é  $E(\omega_2, 0, n_1, A) = D(\omega_2, A) - f(g(\omega_2))$ , que não depende de  $n_1$ . Ou seja, se  $\alpha = 0$ , a função  $\phi(\alpha, n_1, A)$  é constante em relação a  $n_1$ . Evidentemente, do ponto de vista econômico, o equilíbrio keynesiano exige que  $n_1$  também seja igual a zero. Todavia, identificar a solução para (2.20) destacando que  $\phi_{n_1}(0, n_1, A) = 0$  para qualquer  $n_1$  é conveniente para demonstrações posteriores.

Segundo, o equilíbrio clássico puro verifica-se quando  $(\alpha, n_1) = (1, 1)$ . A solução matemática  $\omega_2^* = \phi(1, 1, A) > 0$  é, evidentemente, desprovida de significado econômico, visto só existir o setor flexível. Não obstante, como  $\omega_2^*$  é estritamente positivo e  $g$  é contínua,  $g(\omega_2^*)$  assume um valores finitos, o que é suficiente para garantir que

$$n_2^* = 0 \quad g(\phi(1, 1, A)) = 0. \quad (2.31)$$

O modelo comporta, portanto, uma solução clássica consistente com a extinção do setor rígido.

Por último, as soluções matemáticas nos casos keynesiano puro e de estratégia mista compreendem casos que violam a restrição natural,  $n_1 + n_2 \leq 1$ . Considere, por exemplo, o caso keynesiano puro apresentado na Figura 1. A demanda é monotonicamente crescente em relação ao salário real do setor 2; a oferta é função monotonicamente decrescente de  $\omega_2$  e, por definição, assume valores em  $[0, b]$ . Mas, se  $\alpha = 0$  e  $n_2 < 1$ , o produto máximo é  $f(c) < b$ . Abre-se a possibilidade, portanto, de que, para valores de  $A$  suficientemente elevados, inexista equilíbrio keynesiano puro com significado econômico. Na Figura em análise, existe equilíbrio, com  $n_2 < 1$ , para  $A = A_1$  (cf. ponto  $C$  na Figura 1), mas o mesmo não ocorre no caso de  $A_2 > A_1$ , ponto  $E$  na Figura 1. O ponto  $D$  nesta Figura, no qual  $A = A_0$  e  $A_1 < A_0 < A_2$ , corresponde à situação limite, i. e., caracteriza um equilíbrio keynesiano puro de pleno emprego. Observe que isso não ocorre no caso, para o qual a oferta é a própria reta  $f(c)$ , o que significa que sempre existe o equilíbrio clássico puro. Voltaremos a esse tema na análise da dinâmica do modelo.

### 3 A transição entre períodos

#### 3.1 Fluxos populacionais

Na transição entre períodos, ocorrem as negociações. Firms e trabalhadores podem mudar, então, seu tipo. Por um lado, empresas do setor de salários rígidos podem passar a

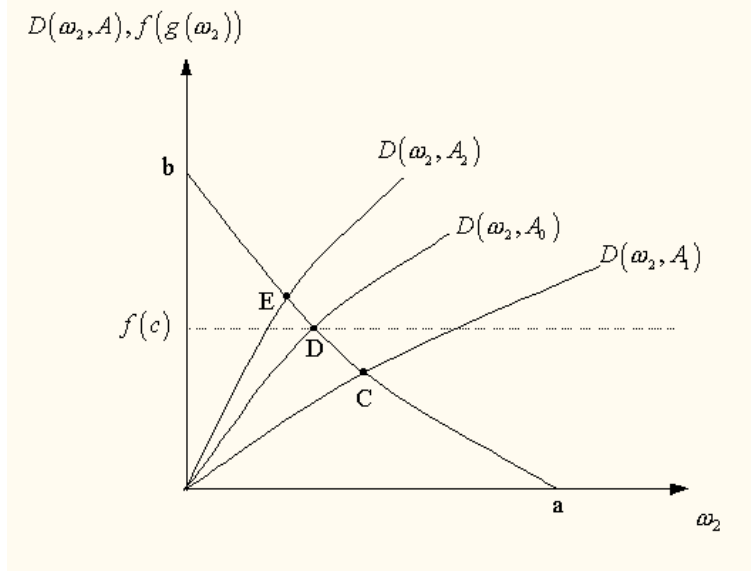


FIG. 1 – Equilíbrio Keynesiano Puro

pertencer ao grupo clássico, em virtude de uma mudança de atitude de seus trabalhadores, que passam a aceitar o salário  $w_1$ . Por outro, nas empresas do setor flexível, os trabalhadores podem exigir o salário nominal  $w_2$ , o que transforma essas empresas em firmas do setor keynesiano.

Considere o tempo uma variável contínua. Seja  $\dot{h}_i = dh_i/dt$  a taxa de variação líquida de firmas no setor  $i$ . Essa taxa pode ser vista como resultado da diferença das taxas de influxo e efluxo, que denominaremos de  $\dot{h}_i^i$  e  $\dot{h}_i^e$ , respectivamente. Assim, temos  $\dot{h}_1 = \dot{h}_1^i - \dot{h}_1^e$ ; e  $\dot{h}_2 = \dot{h}_2^i - \dot{h}_2^e$ . Como o total de firmas é dado, o acréscimo de uma das populações é exatamente igual ao decréscimo da outra, ou seja,  $\dot{h}_1^i = \dot{h}_2^e$  e  $\dot{h}_1^e = \dot{h}_2^i$ . Recordando que  $\alpha = h_1/h$ , a variação do percentual de firmas no setor flexível é :

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{h}_1}{h} = \frac{\dot{h}_1^i - \dot{h}_1^e}{h}. \quad (3.1)$$

Ao fluxo de firmas de 1 para 2 está associado um efluxo de trabalhadores da população  $\dot{N}_1^e$ , que é igual ao número de firmas que saíram vezes o número de trabalhadores que cada firma empregava nesse setor.

$$\dot{N}_1^e = \dot{h}_1^e \frac{N_1}{h_1}. \quad (3.2)$$

O influxo de trabalhadores para 1,  $\dot{N}_1^i$ , é um pouco mais complicado. Uma parte desse influxo,  $\dot{N}_1^{i1}$ , advém da mudança de firmas 2 para 1 e é igual ao número de firmas que

saíram do setor 2 vezes o número de seus empregados :

$$\dot{N}_1^{i1} = \dot{h}_2^e \frac{N_2}{h_2} = \dot{h}_1^i \frac{N_2}{h_2}. \quad (3.3)$$

Um segundo influxo resulta dos desempregados do período anterior que decidem procurar emprego no setor 1. Esse número não é necessariamente igual ao total de desempregados, pois parte deles persisti em procurar emprego no setor 2. Seja esse influxo designado por  $\dot{N}_1^{i2}$ . Segue, então, que :

$$\dot{N}_1 = \dot{N}_1^i - \dot{N}_1^e = \dot{N}_1^{i1} + \dot{N}_1^{i2} - \dot{N}_1^e = \dot{h}_1^i \frac{N_2}{h_2} + \dot{N}_1^{i2} - \dot{h}_1^e \frac{N_1}{h_1}. \quad (3.4)$$

Como  $n_1 = N_1/N$ , sendo  $N$  dado, temos :

$$\dot{n}_1 = \frac{\dot{N}_1}{N} = n_2 \frac{\dot{h}_1^i}{h_2} + \frac{\dot{N}_1^{i2}}{N} - n_1 \frac{\dot{h}_1^e}{h_1}. \quad (3.5)$$

A Figura 2 ilustra os fluxos discutidos nesta seção.

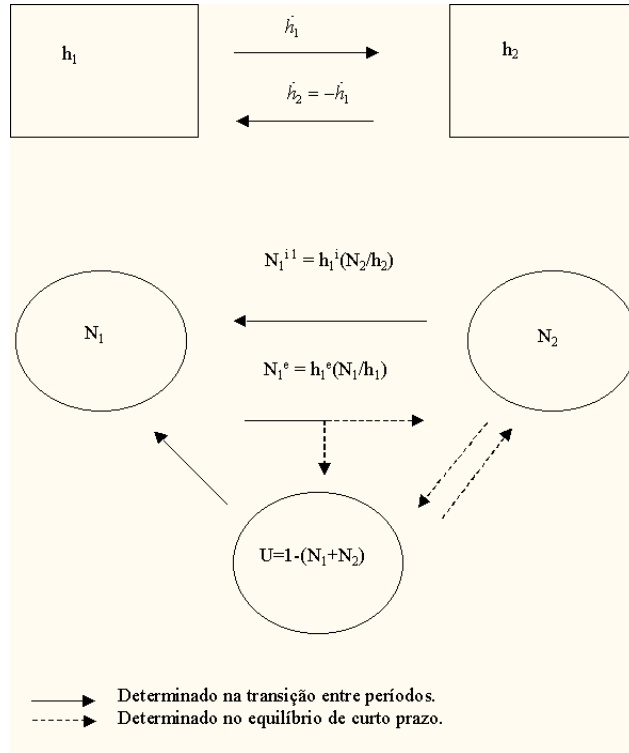


FIG. 2 – Fluxos Populacionais

### 3.2 As decisões dos trabalhadores

Os fluxos das populações entre diferentes estratégias podem ser obtidos definindo-se as taxas de revisão das estratégias por unidade de tempo e as probabilidades de escolha dos agentes revisores (Weibull, 1995 : 149)<sup>8</sup>. No nosso modelo, a estratégia dos trabalhadores empregados é decidida pelo conjunto, colegiado ou representação sindical dos trabalhadores de cada firma. Há, então, tantas unidades de decisão (ou agentes) quantas são as empresas dos dois setores da economia, i. e.,  $h_1$  e  $h_2$ . Já as estratégias dos trabalhadores desempregados são estritamente individuais. Como todos os agentes reavaliam suas estratégias na transição entre períodos, as taxas de revisão por unidade de tempo são iguais a um. Resta, então, determinar as probabilidades de escolha.

Considere, inicialmente, as decisões dos colegiados de trabalhadores empregados. Admita que esses agentes comparam os seus resultados (*payoffs*), os quais definiremos posteriormente, com os obtidos pelos trabalhadores de outra empresa escolhida aleatoriamente, segundo uma distribuição de probabilidade uniforme. A probabilidade de comparação ocorrer com uma empresa na qual vigorou a estratégia alternativa é igual  $h_1/h$ , para os agentes do setor rígido (tipo 2), e  $h_2/h$ , no caso dos agentes do flexível (tipo 1). O número de empresas que *potencialmente* podem mudar de um setor para outro, em ambos os sentidos, é igual o número de agentes em cada população vezes essas probabilidades, ou seja,  $h_2h_1/h$  em ambos os casos.

Na comparação de resultados, supomos que os colegiados de trabalhadores levam em consideração os salários reais e a probabilidade de encontrar emprego no setor 2, que consideramos igual à taxa de desemprego vigente nesse setor,  $n_2/(1 - n_2)$ . Uma forma simples de formalizar essas considerações é supor que os colegiados decidem com base na diferença dos salários esperados,  $\omega_1 - \omega_2n_2/(1 - n_1)$ .

Evidentemente, não há porque supor que todos os agentes revisores reajam da mesma forma a essa diferença. Para um mesmo diferencial, alguns podem julgá-lo suficiente para justificar uma mudança de política, outros não. Ademais, num ambiente de racionalidade limitada, é possível que os resultados não sejam perfeitamente observáveis, principalmente no que concerne à taxa de desemprego. Ou seja, pode haver erros de observação por parte dos agentes revisores, de maneira que mesmo com preferências similares estes agentes reajam de forma distintas à uma mesma diferença  $\omega_1 - \omega_2n_2/(1 - n_1)$ . Para incorporar esses aspectos, supomos que a mudança de estratégia de um agente revisor do tipo  $i$  só se efetiva caso a diferença de salários esperados, obtida pela comparação em pares, seja superior a uma diferença mínima  $\varepsilon_i$ , que suporemos ser uma variável aleatória com função densidade de probabilidade uniforme com suporte  $[-a, a]$ , onde  $a = \max\{|\omega_1 - \omega_2n_2/(1 - n_1)|\}$ .<sup>9</sup>

Segue-se que a probabilidade de um agente revisor do tipo  $i$ , que compara seu salário esperado com o do agente  $j$ , mudar de estratégia é :

---

<sup>8</sup>Para formas alternativas de dedução de dinâmica evolucionárias, ver Vega-Redondo (1996).

<sup>9</sup>Observe que se trata do mesmo parâmetro  $a$  da hipótese sobre a função de produção de (2.1).

$$F(z) = Prob(\varepsilon_i < z) = \int_{-a}^z \frac{1}{2a} d\varepsilon = \frac{a+z}{2a}, \quad (3.6)$$

onde  $z$  é a diferença entre o salário esperado da estratégia alternativa e o da que está sendo adotada. Assim, para uma dada diferença de salários esperados, observada corretamente ou não, todos os agentes revisores cujos  $\varepsilon$ 's são inferiores a essa diferença mudam de estratégia, sendo a probabilidade disso ocorrer dada por (3.6).

Resumindo, a probabilidade de um agente do tipo  $i$  tornar-se um revisor potencial é  $h_j/h$ ,  $j \neq i$ ; a probabilidade de um agente do tipo  $i$  que está reavaliando sua estratégia se tornar um agente do tipo  $j$  é  $F(z)$ . Supondo que estes eventos sejam estatisticamente independentes e multiplicando estas probabilidades obtemos as probabilidades dos agentes mudarem de setor :

$$\text{setor 2 para 1} : \frac{h_1}{h} \left( \frac{a + \omega_1 - \frac{\omega_2 n_2}{1-n_1}}{2a} \right); \quad (3.7)$$

$$\text{setor 1 para 2} : \frac{h_2}{h} \left( \frac{a + \frac{\omega_2 n_2}{1-n_1} - \omega_1}{2a} \right). \quad (3.8)$$

Como as taxas de revisão por unidade de tempo são iguais a um, o influxo e efluxo de firmas do setor flexível são obtidos multiplicando o número de agentes por essas probabilidades condicionais. Temos, então :

$$\dot{h}_1^i = \frac{h_2 h_1}{h} \left( \frac{a + \omega_1 - \frac{\omega_2 n_2}{1-n_1}}{2a} \right); \quad (3.9)$$

$$\dot{h}_1^e = \frac{h_1 h_2}{h} \left( \frac{a - \omega_1 + \frac{\omega_2 n_2}{1-n_1}}{2a} \right). \quad (3.10)$$

Tendo em vista (3.1), o resultado líquido pode ser expresso como,

$$\dot{\alpha} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{a} \left( \omega_1 - \frac{\omega_2 n_2}{1-n_1} \right). \quad (3.11)$$

Considere, agora, as decisões dos trabalhadores desempregados, as quais, como afirmamos anteriormente, são estritamente individuais. Um trabalhador nessa situação possui duas alternativas : oferece os seus serviços no setor flexível ou aguarda por uma eventual contratação no setor rígido no período seguinte. Para formalizar iniciativas dos desempregados, supomos que eles selecionam uma empresa aleatoriamente de acordo com uma distribuição uniforme e comparam o salário vigente nessa empresa com o seu salário de

reserva. Aceitar um emprego no setor 1 significa para o trabalhador desempregado uma revisão de estratégia. De fato, ou ele já era um desempregado e havia optado por tentar novamente um emprego no setor rígido, ou estava empregado nesse setor e perdeu o emprego. Por tratar-se de um estrategista de setor rígido, é plausível assumir que o seu salário reserva guarda alguma relação com o salário do setor no qual ele estava empregado. Supomos, por simplicidade e conveniência matemática, que o seu salário reserva é igual ao salário vigente nesse setor ponderado pela taxa de desemprego. Assim, se a comparação se der com uma empresa do setor rígido, ele não revê sua estratégia; se a comparação for com uma empresa do setor flexível, a probabilidade condicional de migração é dada por (3.7). Logo, para uma população de tamanho  $U$ , o efluxo do contingente de desempregado para o setor 1, normalizado pelo total de trabalhadores da economia, é :

$$\frac{\dot{N}_1^{i2}}{N} = \alpha \frac{U}{N} \left( \frac{a + \omega_1 - \frac{\omega_2 n_2}{1 - n_1}}{2a} \right) = \frac{\alpha (1 - n_1 - n_2)}{2a} \left( a + \omega_1 - \frac{\omega_2 n_2}{1 - n_1} \right). \quad (3.12)$$

Observe que se coexistem os dois setores na economia e há desempregados, esse efluxo será sempre positivo. Ademais, *ceteris paribus*, a probabilidade de um mesmo trabalhador continuar desempregado diminui à longo do tempo (e tende a zero quando  $t$  tende a infinito).

O fluxo total de trabalhadores para o setor flexível é obtido somando-se os dois influxos e subtraindo o efluxo, ou seja, substituindo-se (3.12), (3.9) e (3.10) em (3.5) :

$$\dot{n}_1 = \frac{\alpha - n_1}{2} + \frac{n_1 + \alpha - 2n_1\alpha}{2a} \left( \omega_1 - \frac{\omega_2 n_2}{1 - n_1} \right). \quad (3.13)$$

## 4 O médio prazo

### 4.1 O espaço de estados e a fronteira do pleno emprego

Considere o sistema dinâmico formado pela equações (3.11) e (3.13) apresentadas na seção precedente. Substituindo o salário e o nível de emprego pelos valores de equilíbrio de curto prazo (2.23) e (2.24), obtemos o sistema dinâmico do médio prazo :

$$\dot{\alpha} = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{a} \left( f' \left( \frac{cn_1}{\alpha} \right) - \frac{\phi(\alpha, n_1, A) n_2^*}{1 - n_1} \right); \quad (4.1)$$

$$\dot{n}_1 = \frac{\alpha - n_1}{2} + \frac{n_1 + \alpha - 2n_1\alpha}{2a} \left( f' \left( \frac{cn_1}{\alpha} \right) - \frac{\phi(\alpha, n_1, A) n_2^*}{1 - n_1} \right). \quad (4.2)$$

O espaço de fases é obtido a partir do conjunto  $\Omega_1$  e da restrição natural, ou fronteira de pleno emprego :<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup>À primeira vista, o sistema apresenta indeterminações nos vetores nulo e unitário, mas elas podem

$$\Omega = \{(\alpha, n_1) \in R^2 : 0 < \alpha < 1, 0 < n_1 < 1, n_1 + n_2^* \leq 1\} \cup \{(0, 0), (1, 1)\}. \quad (4.3)$$

A localização da fronteira do pleno emprego e suas alterações em decorrência de alterações de  $A$  são necessárias para compreendermos o espaço de fases do modelo. Para tanto, podemos identificar as seguintes propriedades :

(1) A fronteira sempre passa pelo ponto  $(1, 1)$ . Com efeito, substituindo  $n_1 = 1$  na definição da fronteira obtemos  $1 + n_2^* = 1$ . Como  $\alpha = 1$  implica  $n_2^* = 0$ , a equação é satisfeita no equilíbrio clássico.

(2) Considere o conjunto  $\Omega_1$  definido em (2.3). O intercepto da fronteira com o eixo  $n_1$  depende negativamente do parâmetro  $A$ . Primeiro, observe que se  $\alpha$  é nulo, a fronteira é  $n_1 + g(\phi(0, n_1, A))/c = 1$ . Como  $\phi(0, n_1, A)$  é função constante em relação a  $n_1$ , há solução  $0 \leq n_1 \leq 1$  sempre que  $0 \leq g/c \leq 1$ . Essas desigualdades podem ser atendidas, pois  $g \in [0, \infty)$ . Segundo, temos que :

$$\frac{dn_1}{dA} = -\frac{g'\phi_A}{c} < 0, \quad n_1 \geq 0. \quad (4.4)$$

Assim, elevações de  $A$  deslocam esse intercepto para baixo no plano de fases, permanecendo fixo o ponto  $(1, 1)$ . Todavia, se  $g/c$  for maior do que um, a fronteira não intercepta o eixo das ordenadas para  $n_1 \geq 0$ , o que implica que o vetor  $(0, 0)$  deixa de pertencer ao espaço de fases. Esse resultado é condizente com a análise do equilíbrio keynesiano puro de curto prazo. Com efeito, havíamos demonstrado que para valores altos de  $A$  a solução de curto prazo (que atendesse a restrição de pleno emprego) poderia não existir.

(3) Para  $(\alpha, n_1) \in \text{int } \Omega$ , a fronteira do pleno emprego pode coincidir com o eixo de 45 graus do espaço de fases, mas não pode interceptá-lo. Para provar essa afirmativa, considere o seguinte sistema :

$$\alpha = n_1; \quad (4.5)$$

$$n_1 + n_2 = 1; \quad (4.6)$$

$$D\left(f'\left(\frac{cn_2}{1-\alpha}\right), A\right) - \alpha f\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - (1-\alpha) f\left(\frac{cn_2}{1-\alpha}\right) = 0 \quad (4.7)$$

A solução para  $\alpha, n_1$  e  $n_2$  identifica os pontos que, simultaneamente, pertencem ao eixo de 45 graus, à fronteira de pleno emprego e solucionam o modelo de curto prazo. O nosso propósito é mostrar que se existe solução, então, todo  $\alpha = n_1$  tal que  $(\alpha, n_1) \in \text{int } \Omega_1$ ,

---

ser contornadas com o uso de limites, como mostraremos posteriormente ao discutirmos os equilíbrios do sistema dinâmico.

também resolve o sistema. Substituindo as duas primeiras equações na última, obtemos  $D(f'(c), A) - f(c) = 0$ .

A equação envolve apenas parâmetros. Como a derivada do lado esquerdo dessa equação em relação a  $A$  é  $D_2 > 0$ , se existe um  $A$  que elimina o excesso de demanda, ele é único. Admita que esse seja o valor de  $A$ . O sistema fica reduzido às duas primeiras equações que compreendem três variáveis. Logo, temos um grau de liberdade e o sistema é resolvido para quaisquer  $\alpha = n_1$ . Por conseguinte, para esse específico  $A$ , a fronteira de pleno emprego coincide com o eixo de 45 graus.

## 4.2 Os equilíbrios do médio prazo

No médio prazo, o modelo comporta três tipos de equilíbrio : keynesiano, clássico e de estratégia mista. Como as equações do sistema dinâmico não são definidas nos vetores nulo e unitário, que correspondem às situações keynesiana e clássica, podemos redefinir o sistema dinâmico assumindo que os valores das expressões do lado direito de (4.1) e (4.2) são iguais aos seus limites nesses casos. Para caracteriza-los como equilíbrios basta, então, assegurar que esses limites são iguais a zero quando  $(\alpha, n_1)$  tende a  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ . para qualquer seqüência pertencente ao espaço de fases.

*Equilíbrio keynesiano* :  $(\alpha, n_1) = (0, 0)$ . Considere a primeira equação do sistema dinâmico, (4.1). Como  $f'(cn_1/\alpha)$  é limitada e  $\phi(\cdot)$  e  $n_2^* = (1 - \alpha)g(\phi(\cdot))/c$  são definidas e contínuas no vetor nulo, temos que

$$\lim_{(\alpha, n_1) \rightarrow (0, 0)} \frac{\alpha(1 - \alpha)}{a} \left( f' \left( \frac{cn_1}{\alpha} \right) - \frac{\phi(\cdot)n_2^*}{(1 - n_1)} \right) = 0. \quad (4.8)$$

Ou seja, se  $(\alpha, n_1) \rightarrow (0, 0)$ , então  $\alpha \rightarrow 0$ . O mesmo raciocínio pode ser aplicado à segunda equação do sistema, (4.2), visto que  $(\alpha - n_1)/2$  e o coeficiente  $(n_1 + \alpha - 2n_1\alpha)/2a$ , que multiplica diferença de salários, tendem a zero quando  $(\alpha, n_1) \rightarrow (0, 0)$ .

*Equilíbrio clássico* :  $(\alpha, n_1) = (1, 1)$ . No que tange a (4.1), o modelo comporta o equilíbrio clássico somente se o seguinte limite for igual a zero :

$$\lim_{(\alpha, n_1) \rightarrow (1, 1)} \frac{\alpha(1 - \alpha)}{a} f' \left( \frac{cn_1}{\alpha} \right) + \lim_{(\alpha, n_1) \rightarrow (1, 1)} - \frac{\alpha(1 - \alpha)}{a} \frac{\phi(\cdot)n_2^*}{(1 - n_1)}. \quad (4.9)$$

O primeiro limite, como já vimos no caso anterior, é igual a zero. Em relação ao segundo, observe que para qualquer  $n_1$  tal que  $0 \leq n_1 + n_2^* \leq 1$  e  $0 \leq n_1 < 1$  temos

$$\max \left\{ \frac{\phi(\cdot) n_2^*}{1 - n_1} \right\} = \max \{ \phi(\cdot) \} \times \max \left\{ \frac{n_2^*}{1 - n_1} \right\} = \quad (4.10)$$

$$= a \times \max \left\{ \frac{1 - n_1}{1 - n_1} \right\} = a \times 1 = a; \text{ e} \quad (4.11)$$

$$\min \left\{ \frac{\phi(\cdot) n_2^*}{1 - n_1} \right\} = 0. \quad (4.12)$$

Logo,  $\phi(\cdot) n_2^*/(1 - n_1)$  é limitada e, portanto, o limite do segundo termo de (4.9) também é igual a zero. Demonstração análoga vale para a segunda equação do sistema dinâmico, pois se  $(\alpha, n_1)$  tende  $(1, 1)$ , tanto  $(\alpha - n_1)/2$  quanto  $(n_1 + \alpha - 2n_1\alpha)/2a$  tendem a zero.

*Equilíbrios de estratégia mista :*

As situações clássica e keynesiana puras não esgotam as possibilidades de equilíbrio. Considere a equação do fluxo de firmas. Qualquer  $(\alpha, n_1)$  tal que a diferença de salários é zero anula  $\dot{\alpha}$ . Já no que concerne ao fluxo de trabalhadores, se  $\alpha$  for igual a  $n_1$  e a diferença de salários nula, então,  $\dot{n}_1$  é igual a zero. Logo, existe um terceiro conjunto de equilíbrios que é formado pelo vetores que atendem a essas condições, ou seja :

$$\forall (\alpha, n_1) : 0 < \alpha = n_1 < 1 \wedge f' \left( \frac{cn_1}{\alpha} \right) - \frac{\phi(\cdot) n_2^*}{1 - n_1} = 0. \quad (4.13)$$

Todos os equilíbrio situam-se, portanto, no eixo de 45 graus. Os de estratégia mista são, normalmente, equilíbrios com desemprego, pois a fronteira de pleno emprego não tem pontos em comum com o eixo de 45 graus, a não ser no caso dela coincidir com esse eixo, situação na qual temos infinitos equilíbrios, mas que só ocorre para um único valor de  $A$ .

### 4.3 Análise dos equilíbrios de estratégia mista

Existe equilíbrio de estratégia mista somente se a diferença de salários é nula :

$$f' \left( \frac{c n_1}{\alpha} \right) - \frac{\phi(\cdot) (1 - \alpha) g(\phi(\cdot))}{c(1 - n_1)} = 0. \quad (4.14)$$

Como  $n_1$  deve ser igual a  $\alpha$  nesses equilíbrios, obtemos :

$$f'(c) c = \omega_2^* g(\omega_2^*). \quad (4.15)$$

Existem, portanto, tantos equilíbrios de estratégia mista quantas forem as soluções dessa equação para  $\alpha = n_1 \in (0, 1)$ .

Considere, inicialmente, a solução  $\omega_2^* = f'(c)$ , representada na figura 3 pelo ponto  $Q$ . A equação (4.15) reduz a  $c = g(\omega_2^*)$ . Substituindo  $g(\omega_2^*)$  por  $cn_2^*/(1 - \alpha)$  e, em seguida,  $\alpha$  por  $n_1$ , obtemos  $n_1 + n_2^* = 1$ . Vigora, portanto, o pleno emprego e há infinitos equilíbrios, pois, como demonstramos anteriormente, no caso  $\alpha = n_1$  a fronteira de pleno emprego é

o próprio eixo de 45 graus. Todavia essa situação depende de um específico valor para o parâmetro  $A$ , motivo pelo qual escusamo-nos de analisar esse caso. O mesmo raciocínio permite-nos descartar, como candidato a equilíbrio de estratégia mista, qualquer  $\alpha$  tal que  $g(\omega_2^*) > c$ , pois isso implica  $n_2^* + n_1 > 1$ .

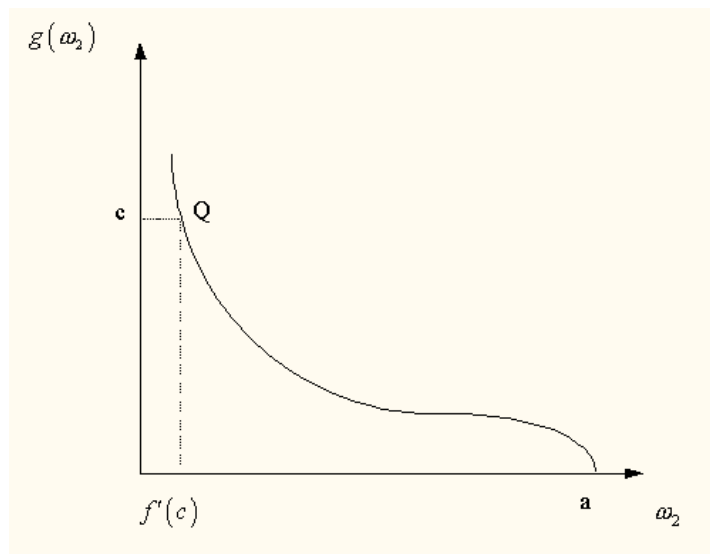


FIG. 3 –

Voltemo-nos, então, para o exame de equilíbrios de estratégia mista com desemprego. No gráfico acima, identificar equilíbrios desse tipo significa examinar se existem  $\alpha = n_1$  tais que os salários reais do setor 2,  $\omega_2$  multiplicados por  $g(\omega_2)$  resultam numa área igual  $f'(c)c$ . Podemos, portanto, discutir esses equilíbrios por meio do exame do comportamento da função  $\omega_2 g(\omega_2)$ , onde  $\omega_2$  é avaliado sempre ao longo do eixo de 45 graus do espaço de fases para atender à primeira condição de equilíbrio de estratégia mista.

Devido às hipóteses a respeito da função de produção (2.1), temos que se o salário assume seu valor máximo,  $a$ , então,  $g(\omega_2)$  é igual a zero. Logo, para  $\omega_2 = a$ , a função  $\omega_2 g(\omega_2)$  é nula. Além disso,  $\omega_2 g(\omega_2)$  é contínua e, como vimos acima, igual a  $cf'(c)$  quando  $\omega_2$  é igual a  $f'(c)$ . Dois formatos possíveis de  $\omega_2 g(\omega_2)$  são apresentados na figura 4.

No gráfico acima, a curva cheia intercepta, por construção, a reta  $cf'(c)$  nos pontos  $Q$  e  $S_0$ . Temos, então, um único equilíbrio de estratégia mista. Já no caso da curva tracejada, há três equilíbrios, representados pelos pontos  $S_1, E_1$  e  $S_2$ .

Assumimos, até agora, que  $\max\{\omega_2\} = a$ . No entanto, no sistema dinâmico  $\omega_2^*$  pode não atingir esse máximo. Com efeito, observe que existe uma relação perfeitamente determinada entre  $\omega_2^*$  e  $\alpha$  ao longo do eixo de 45 graus, ou seja, a derivada total é :

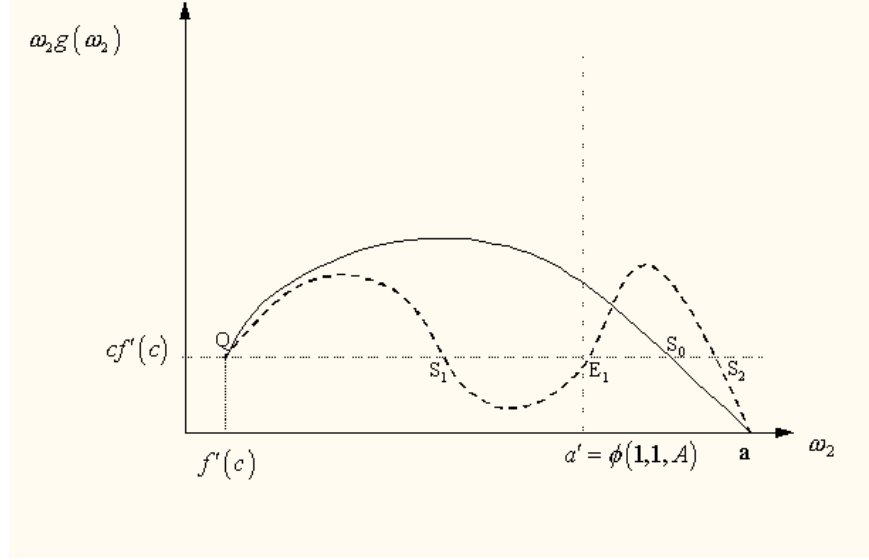


FIG. 4 –

$$\left. \frac{d\omega_2^*}{d\alpha} \right|_{dA=0, \alpha=n_1, d\alpha=dn_1} = \phi_\alpha + \phi_{n_1} > 0, \quad (4.16)$$

De fato, recordando (2.27) e (2.25), temos :

$$\phi_\alpha + \phi_{n_1} = \frac{f\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - \frac{cn_1}{\alpha} f'\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - f(g(\omega_2)) + cf'\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right)}{D_1 - (1 - \alpha)\omega_2 g'(\omega_2)}. \quad (4.17)$$

Como  $g(\omega_2) = cn_2/(1 - \alpha)$  e essas derivadas são calculadas em  $\alpha = n_1$ , temos que :

$$\phi_\alpha + \phi_{n_1} = \frac{f(c) - f\left(\frac{cn_2}{1-n_1}\right)}{D_1 - (1 - \alpha)\omega_2 g'(\omega_2)} > 0, \quad (4.18)$$

pois, sob a hipótese de desemprego,  $n_2 < 1 - n_1$ . Logo, o valor máximo que  $\omega_2^*$  pode assumir, para pontos calculado ao longo do eixo de 45 graus, é  $a' = \phi(1, 1, A)$ .

Como sabemos que  $\phi_A$  é negativo, quanto maior for  $A$ , menor será o salário máximo  $a'$ . Segue-se, portanto, que o domínio da função  $\omega_2 g(\omega_2)$  é o intervalo  $[f'(c), a']$ , no qual o extremo inferior é fixo e o superior depende inversamente de  $A$ , sendo  $a$  o valor máximo de  $a'$ . Para um  $A$  suficientemente grande, o domínio reduz-se a singularidade  $f'(c)$ , situação que, como vimos, corresponde ao caso de infinitos equilíbrios de estratégia mista de pleno emprego. Evidentemente, variações de  $A$  e, por conseguinte, de  $a'$ , alteram o número de equilíbrios de estratégia mista com desemprego para uma mesma função  $\omega_2 g(\omega_2)$ .

O modelo comporta, portanto, uma multiplicidade de configurações estruturais a depender dos valores dos parâmetros  $c$  e  $A$ , que determinam o domínio  $[f'(c), a']$  e do formato da função  $\omega_2 g(\omega_2)$ . Considere, por exemplo, a curva pontilhada, com situação inicial  $a' = a$ , e admita aumentos contínuos dos gastos do governo. Inicialmente, temos a configuração  $S_1 - E_1 - S_2$ . À medida que  $A$  aumenta a economia apresenta, sucessivamente, as configurações : (i)  $S_1 - E_1$ ; (ii)  $S_1$ ; (iii) inexistência de equilíbrios de estratégia mista com desemprego; (iv) infinitos equilíbrios de pleno emprego.

Os equilíbrios  $S$  e  $E$  distinguem-se pelo sinal da derivada de  $\omega_2 g(\omega_2)$  : no primeiro caso, esse sinal é negativo; no segundo, positivo. O cálculo dessa derivada resulta na seguinte expressão :

$$\frac{\partial \omega_2 g(\omega_2)}{\partial \omega_2} = g(\omega_2) + \omega_2 g'(\omega_2). \quad (4.19)$$

Segue-se, então, que esse sinal está associado à elasticidade da função inversa da produtividade marginal : se o sinal for positivo, a elasticidade é menor do que zero e maior do que  $-1$ ; se for negativo, a elasticidade é menor do que  $-1$ . Ou seja, em última instância, a existência e o número de equilíbrios de estratégia mista dependem de hipóteses a respeito da terceira derivada da função de produção. A elasticidade determina, igualmente, as propriedades dinâmicas desses equilíbrios. Como demonstraremos a seguir, os equilíbrios  $S$  são selas e os  $E$  assintoticamente estáveis.

Seja a diferença de salários expressa como

$$\Psi(\alpha, n_1, A) = f'\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - \frac{(1-\alpha)\phi(\cdot)g(\phi(\cdot))}{c(1-n_1)}. \quad (4.20)$$

A matriz jacobiana da linearização em torno dos equilíbrios de estratégia mista é :

$$J|_{\alpha=n_1, \Psi=0} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\alpha)\alpha\Delta_1}{\frac{1}{2} + \frac{(1-\alpha)\alpha\Delta_1}{a}} & \frac{(1-\alpha)\alpha\Delta_2}{-\frac{1}{2} + \frac{(1-\alpha)\alpha\Delta_2}{a}} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

onde

$$\Delta_1 = \frac{\omega_2 g(\omega_2)}{c(1-\alpha)} - \frac{\phi_\alpha(g(\omega_2) + \omega_2 g'(\omega_2))}{c} - \frac{cf''(c)}{\alpha}; \quad (4.22)$$

$$\Delta_2 = -\frac{\omega_2 g(\omega_2)}{c(1-\alpha)} - \frac{\phi_{n_1}(g(\omega_2) + \omega_2 g'(\omega_2))}{c} + \frac{cf''(c)}{\alpha}. \quad (4.23)$$

Os autovalores são :

$$\left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{(1-\alpha)\alpha(\phi_\alpha + \phi_{n_1})(g(\omega_2) + \omega_2 g'(\omega_2))}{ca} \right\}. \quad (4.24)$$

Dado que nos equilíbrios de estratégia mista  $\phi_\alpha + \phi_{n_1} > 0$ , o sinal do segundo autovalor é determinado inequivocamente pelo sinal de  $g(\omega_2) + \omega_2 g'(\omega_2)$ . Se esse sinal for positivo, os dois autovalores são negativos e o equilíbrio é assintoticamente estável; se for negativo, os autovalores apresentam sinal contrários e temos instabilidade de sela.

Em síntese, as hipótese que fizemos ao longo do texto são suficientes para permitir a existência de equilíbrios de estratégia mista. Eles podem ser múltiplos, assintoticamente estáveis ou selas. A presença de um equilíbrio estável significa que há uma bacia de atração, tal que se o equilíbrio de curto prazo situar-se nessa região, a economia tende a convergir para um equilíbrio de médio prazo com desemprego. Ademais, os equilíbrios de estratégia mista são, necessariamente, equilíbrios de fluxos e não de estoques. Com efeito, recuperando as equações de influxo e efluxo, (3.3) e (3.4), constatamos que  $\dot{h}_1^i = \dot{h}_1^e = h_2 h_1 / 2h > 0$ . Ou seja, ambos são positivos e sua diferença se anula. Por conseguinte, mesmo nesses equilíbrios existem fluxos entre as três populações de trabalhadores. Em particular, trabalhadores empregados perdem suas ocupações e trabalhadores desempregados obtêm ocupações tanto no setor keynesiano quanto no setor clássico. Em outros termos, a economia convive com uma determinada taxa de desemprego, não existem forças endógenas que eliminem esse desemprego mesmo no médio prazo, mas não são sempre os mesmos trabalhadores que permanecem sem emprego.

Por fim, observe o papel crucial desempenhado pelo parâmetro  $A$ . Não só ele altera a fronteira de pleno emprego, e, portanto, o espaço de fases do modelo, como também o número de equilíbrios para uma mesma função de produção. A política econômica adquire, por extensão, uma relevância nos resultados do médio prazo no que tange à determinação do nível de emprego que lhe foi, de certo modo, negada na análise tradicional do modelo keynesiano.

#### 4.4 Análise dos equilíbrios de estratégia pura

Na discussão das propriedades dos equilíbrios clássico e keynesiano, vamos nos restringir ao caso mais simples no qual existe um único equilíbrio de estratégia mista de sela, que designaremos por  $(\alpha^*, n_1^*)$ . Como o sistema dinâmico não é continuamente diferenciável nesses equilíbrios, é impossível aplicar a técnica tradicional de linearização. Devemos, então, proceder uma análise qualitativa. Para tanto, é conveniente impor mais estrutura ao modelo.

Considere a curva de demarcação  $\Psi(\alpha, n_1, A) = 0$ , associada a (4.1). Vamos assumir, por hipótese, que para todo  $\alpha \in (0, 1)$  existe uma função  $\psi(\alpha) \in (0, 1)$  contínua tal que  $\Psi(\alpha, \psi(\alpha), A) = 0$ . Ademais, supomos que

$$\Psi_{n_1} = -\frac{(1-\alpha)\omega_2 g(\omega_2)}{c(1-n_1)^2} - \frac{(1-\alpha)\phi_{n_1}(g(\omega_2) + \omega_2 g'(\omega_2))}{c(1-n_1)} + \frac{cf''(\frac{cn_1}{\alpha})}{\alpha} < 0. \quad (4.25)$$

para quaisquer  $(\alpha, n_1) \in \text{int } \Omega$ .<sup>11</sup>

Dada essas hipóteses, a posição de  $\Psi(\cdot) = 0$  no plano de fases pode ser identificada por meio do exame dos limites de  $\psi(\alpha)$ , quando  $\alpha$  tende a zero e a um, e do sinal de  $\partial\psi/\partial\alpha$  no equilíbrio de estratégia mista, i. e., quando essa curva de demarcação corta o eixo de 45 graus. Começemos pela derivada.

Se a curva corta o eixo de 45 graus por baixo, devemos ter

$$\frac{\partial\psi(\alpha^*, n_1^*)}{\partial\alpha} = -\frac{\Psi_\alpha}{\Psi_{n_1}} = \frac{-\frac{\omega_2 g(\omega_2)}{c(1-\alpha)} + \frac{\phi_\alpha(g(\omega_2) + \omega_2 g'(\omega_2))}{c} + \frac{cf''(c)}{\alpha}}{-\frac{\omega_2 g(\omega_2)}{c(1-\alpha)} - \frac{\phi_{n_1}(g(\omega_2) + \omega_2 g'(\omega_2))}{c} + \frac{cf''(c)}{\alpha}} > 1. \quad (4.26)$$

Como a hipótese (4.25) garante que o denominador é negativo, temos que essa desigualdade é atendida se, e somente se,

$$(\phi_\alpha + \phi_{n_1})(g(\omega_2) + \omega_2 g'(\omega_2)) < 0. \quad (4.27)$$

Sabemos que  $\phi_\alpha + \phi_{n_1} > 0$  quando essas derivadas são calculadas em  $\alpha = n_1$ . Logo, a condição (4.27) depende do sinal de  $g(\omega_2) + \omega_2 g'(\omega_2)$ , o qual, como sabemos, determina também as propriedades de estabilidade do equilíbrio de estratégia mista. Assim, a curva de demarcação corta o eixo de 45 graus por baixo se, e somente se,  $g(\omega_2) + \omega_2 g'(\omega_2)$  for menor do que zero, ou seja, se o equilíbrio de estratégia mista for uma sela. Observe, para uso posterior, que :

$$\Psi_\alpha + \Psi_{n_1} > 0. \quad (4.28)$$

No que concerne aos limites, note que, sob a hipótese de que o equilíbrio é único e é uma sela, a função  $\psi(\alpha) > 0$  situa-se abaixo de eixo de 45 graus para  $\alpha \in (0, \alpha^*)$  e acima desse eixo se  $\alpha \in (\alpha^*, 1)$ . Assim, a função está limitada superiormente (inferiormente) pelo eixo à esquerda (direita) do equilíbrio de estratégia mista. Segue-se, então, que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi(\alpha) = 0$ ; e  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \psi(\alpha) = 1$ . Um formato possível de  $\Psi(\alpha, n_1, A) = 0$  é apresentado na figura 5.

Considere, agora, a curva de demarcação associada a (4.2). Seja

$$\Gamma(\alpha, n_1, A) = \frac{\alpha - n_1}{2} + \frac{n_1 + \alpha - 2n_1\alpha}{2a}\Psi(\alpha, n_1, A). \quad (4.29)$$

Admita que exista uma função  $\gamma(\alpha) \in (0, 1)$  contínua tal que, para todo  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\Gamma(\alpha, \gamma(\alpha), A) = 0$ .

Se a curva de demarcação corta o eixo de 45 graus por baixo, temos :

$$\frac{\partial\gamma(\alpha^*, n_1^*)}{\partial\alpha} = -\frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_{n_1}} = \frac{a + 2(1-\alpha)\alpha\Psi_\alpha}{a - 2(1-\alpha)\alpha\Psi_{n_1}} > 1. \quad (4.30)$$

---

<sup>11</sup>Observe que o primeiro e o último termo dessa expressão são sempre negativos. Como  $\phi_{n_1}$  é sempre positivo, o segundo termo depende do sinal de  $g(\omega_2) + \omega_2 g'(\omega_2)$ , que foi discutido na seção anterior.

Devido à hipótese  $\Psi_{n_1} < 0$ , o denominador é sempre positivo. Logo, a condição acima é atendida se, e somente se :

$$2(1 - \alpha)\alpha(\Psi_\alpha + \Psi_{n_1}) > 0. \quad (4.31)$$

Tendo em vista (4.28), concluímos, então, que, se o equilíbrio de estratégia mista for uma sela a curva de demarcação corta o eixo por baixo. Por fim, da discussão dos equilíbrios do médio prazo, sabemos que  $\Gamma(\alpha, n_1, A)$  tende aos vetores nulos e unitário. Em síntese, as duas curvas apresentam características muito semelhantes.

Para determinar a posição relativa das duas curvas, podemos comparar as duas inclinações no equilíbrio de estratégia mista. Da discussão acima, temos que :

$$\frac{\partial\psi(\alpha^*, n_1^*)}{\partial\alpha} - \frac{\partial\gamma(\alpha^*, n_1^*)}{\partial\alpha} = -\frac{a(\Psi_\alpha + \Psi_{n_1})}{\Psi_{n_1}(a - 2(1 - \alpha)\alpha\Psi_{n_1})}. \quad (4.32)$$

Como o denominador é sempre positivo, o sinal da expressão acima depende de  $\Psi_\alpha + \Psi_{n_1}$ , o que nos permite concluir que, no caso de sela<sup>12</sup> :

$$\frac{\partial\psi(\alpha^*, n_1^*)}{\partial\alpha} > \frac{\partial\gamma(\alpha^*, n_1^*)}{\partial\alpha}. \quad (4.33)$$

Assim, a primeira curva de demarcação corta a segunda por baixo no equilíbrio de estratégia mista e, portanto, situa-se abaixo desta para  $\alpha \in (0, \alpha^*)$  e acima para  $\alpha \in (\alpha^*, 1)$ .

Por último, as setas direcionais podem ser obtidas observando-se que, como  $\Psi_{n_1}$  é menor do que zero, então a diferença salarial  $\Psi$  e, portanto,  $\dot{\alpha}$  são positivos (negativos) nos pontos abaixo (acima) da curva de demarcação  $\Psi(\cdot) = 0$ . No tocante à segunda curva de demarcação  $\Gamma(\cdot) = 0$ , considere um ponto abaixo dela e pertencente à curva  $\Psi(\cdot) = 0$ . Nesse ponto, dadas as posições relativas da duas curvas, que se situam ambas abaixo do eixo de 45 graus, temos  $\alpha > n_1$  e, portanto,

$$\dot{n}_1 = \Gamma(\cdot) = \frac{\alpha - n_1}{2} > 0. \quad (4.34)$$

Evidentemente, o mesmo sinal de  $\dot{n}_1$  vale em todos os pontos abaixo da curva  $\Gamma(\cdot) = 0$  e nos pontos acima  $\dot{n}_1 < 0$ .

O diagrama de fases permite concluir que, como era de se esperar, quando o equilíbrio de estratégia mista é uma sela, os equilíbrios keynesiano e clássico são atratores locais. Assim, a política econômica, mesmo que não gere as bifurcações estudadas na seção anterior (criação e destruição de equilíbrios), pode alterar a fronteira das bacias de atração. A economia poderia convergir, então, para outro equilíbrio. A demanda determinaria, portanto, a taxa de desemprego do médio prazo.

---

<sup>12</sup>Evidentemente, no caso de atrator vale o sinal de menor. No que segue, iremos nos restringir ao caso sela.

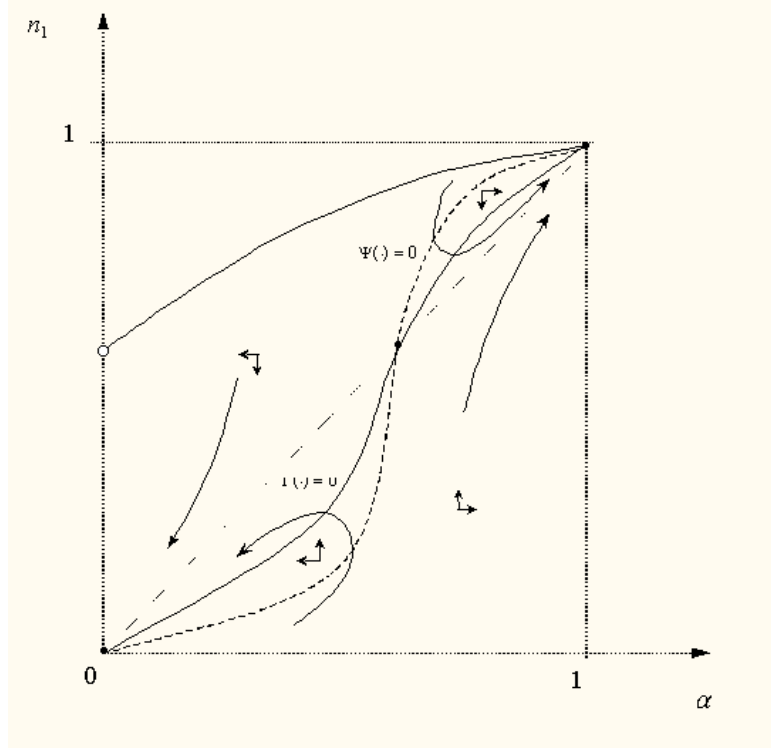


FIG. 5 –

## 5 Conclusões

(a ser concluído)

## 6 Apêndice

Para provar a continuidade da função  $\phi(\alpha, n_1, A)$  para pontos  $(0, n_1, A)$  observe, inicialmente, que, no subconjunto  $\{(\alpha, n_1, A) \in \Omega_1 \times R_+ : \alpha \neq 0\}$ , pelo teorema da função implícita, as derivadas

$$\phi_\alpha \equiv \frac{\partial \omega_2^*}{\partial \alpha} = \frac{f\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - \frac{cn_1}{\alpha} f'\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - f(g(\omega_2))}{D_1 - (1 - \alpha)\omega_2 g'(\omega_2)} \quad (6.1)$$

e

$$\phi_{n_1} \equiv \frac{\partial \omega_2^*}{\partial n_1} = \frac{cf'\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right)}{D_1 - (1 - \alpha)\omega_2 g'(\omega_2)} \quad (6.2)$$

são contínuas, e, portanto, limitadas. No subconjunto  $\{(\alpha, n_1, A) \in \Omega_1 \times R_+ : \alpha = 0\}$  as derivadas laterais  $\phi_{n_1}$  e  $\phi_\alpha$  não são definidas. Não obstante, vale a seguinte propriedade :

**Lema 6.1**  $\phi_\alpha$  e  $\phi_{n_1}$  são limitadas quando  $x_1^s = (\alpha^s, n_1^s, A^s) \in \Omega_1 \times R_+$  tende a  $(0, n_1, A)$  para  $s \rightarrow \infty$ .

*Prova.* O denominador  $\partial E / \partial \omega_2 = D_1 - (1 - \alpha)\omega_2 g'(\omega_2)$ , comum a ambas as derivadas, é estritamente positivo. O numerador de  $\phi_\alpha$  é  $f\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - \frac{cn_1}{\alpha} f'\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - f(g(\omega_2^*))$ . Como  $f(0) = 0$  e  $\sup f = b$ ,  $f(g(\omega_2^*))$  é limitada. Para examinar a expressão  $f\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right) - \frac{cn_1}{\alpha} f'\left(\frac{cn_1}{\alpha}\right)$ , considere  $v = \frac{cn_1}{\alpha}$ . Sabemos que  $f(v) \leq b$  e  $v f'(v) \geq 0$ . Logo,  $f(v) - v f'(v) \leq b$ . Ademais,  $f(v) - v f'(v) \geq 0$  sempre que  $f(v)/v \geq f'(v)$ , ou seja, no caso em que a produtividade média é maior ou igual à produtividade marginal, o que sempre se verifica sob a hipótese de rendimentos decrescentes. Portanto,  $0 \leq f(v) - v f'(v) \leq b$ . Logo, para qualquer seqüência  $x_1^s$  que tenda a  $(0, n_1, A)$  quando  $s \rightarrow \infty$ , existe uma vizinhança em torno de  $(0, n_1, A)$  na qual  $f(v) - v f'(v) \in [0, b]$ . Segue-se que o numerador de  $\phi_\alpha$  também é limitado e, portanto, existe  $M > 0$  tal que  $\lim_{s \rightarrow \infty} |\phi_\alpha(\alpha^s, n_1^s, A^s)| \leq M$  sempre que  $\lim_{s \rightarrow \infty} (\alpha^s, n_1^s, A^s) = (0, n_1, A)$ .

Para  $\phi_{n_1}$ , temos que numerador é  $cf'(cn_1/\alpha)$ . Como, por hipótese, a função de produtividade marginal é limitada, existe  $M > 0$  finito tal que  $\lim_{s \rightarrow \infty} |\phi_{n_1}(\alpha^s, n_1^s, A^s)| \leq M$  sempre que  $\lim_{s \rightarrow \infty} (\alpha^s, n_1^s, A^s) = (0, n_1, A)$ . ■

**Proposição 6.1**  $\phi(\alpha, n_1, A)$  é contínua nos pontos  $(0, n_1, A) \in \Omega_1 \times R_+$ .

*Prova.* Sejam  $x = (0, n_1, A) \in \Omega_1 \times R_+$  e  $k = (k_1, k_2, k_3) \in R^3$  tal que  $x + k = (k_1, n_1 + k_2, A + k_3) \in \Omega_1 \times R_+$ . Observe que  $\phi(x) = \phi(0, n_1, A)$  e  $\phi(x + k) = \phi(k_1, n_1 + k_2, A + k_3)$ . A variação da função  $\phi(\alpha, n_1, A)$  na direção dada pelo vetor  $k$  é  $k_0 \equiv \phi(x + k) - \phi(x)$ . Ademais,  $E(\phi(x), x) = E(\phi(x + k), x + k) = 0$ . Segue-se que :

$$E(\phi(x), x) - E(\phi(x + k), x + k) = 0. \quad (6.3)$$

Tomemos uma escalar  $\tau \in [0, 1] \subset R$  e construamos a seguinte função paramétrica :

$$F(\tau) = E(\phi(x) + k_0\tau, x + k\tau). \quad (6.4)$$

Diferenciando em relação a  $\tau$ , obtemos para qualquer  $\tau \in (0, 1]$  :

$$F'(\tau) = \frac{\partial E}{\partial \omega_2} k_0 + \frac{\partial E}{\partial \alpha} k_1 + \frac{\partial E}{\partial n_1} k_2 + \frac{\partial E}{\partial A} k_3 = \nabla E(\phi(x + k\tau), x + k\tau) \cdot \ell, \quad (6.5)$$

onde  $\nabla E(\cdot)$  é o vetor gradiente da função de excesso de demanda e  $\ell = (k_0, k_1, k_2, k_3)$ . Observe que o vetor gradiente não está definido para  $\tau = 0$ . Sabemos que a função de excesso de demanda  $E(\phi(x), x)$  é contínua no domínio convexo  $(0, a] \times \Omega_1 \times R_+$ . A função

paramétrica  $F(\tau)$  é, portanto, contínua para qualquer  $\tau \in [0, 1]$ . Em particular a  $F(\cdot)$  é contínua no subintervalo  $[0, \tau] \subset [0, 1]$  e derivável em qualquer ponto interior deste subintervalo. Existe, então, pelo teorema do valor médio de Lagrange, uma constante  $\theta \in (0, 1)$  tal que :

$$\frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = F'(\theta\tau), \quad (6.6)$$

A partir de (6.5) e (6.6) temos :

$$\frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = \nabla E(\phi(x + k\theta\tau), x + k\theta\tau) \cdot \ell \quad (6.7)$$

Fazendo  $\tau = 1$ , obtemos :

$$F(1) - F(0) = \nabla E(\phi(x + k\theta), x + k\theta) \cdot \ell \quad (6.8)$$

Com base em (6.3) e (6.4) inferimos :

$$F(1) - F(0) = E(\phi(x) + k_0, x + k) - E(\phi(x), x) = 0 \quad (6.9)$$

Logo, de (6.8) e (6.9) :

$$\nabla E(\phi(x + k\theta), x + k\theta) \cdot \ell = 0 \quad (6.10)$$

Considerando (6.5), ao dividirmos ambos os lados de (6.10) por  $\partial E / \partial \omega_2 = D_1 - (1 - \alpha)\omega_2 g'(\omega_2) > 0$ , e isolarmos  $k_0 \equiv \phi(x + k) - \phi(x)$  chegamos a :

$$\phi(x + k) - \phi(x) \equiv k_0 = \phi_\alpha k_1 + \phi_{n_1} k_2 + \phi_A k_3, \quad (6.11)$$

onde as derivadas  $\phi_\alpha = -\frac{\partial E / \partial \alpha}{\partial E / \partial \omega_2}$ ,  $\phi_{n_1} = -\frac{\partial E / \partial n_1}{\partial E / \partial \omega_2}$  e  $\phi_A = -\frac{\partial E / \partial A}{\partial E / \partial \omega_2}$  são calculadas no ponto  $(\phi(x + k\theta), x + k\theta)$ .

Por fim, observe que :

$$\lim_{k \rightarrow (0,0,0)} k_0 = \lim_{k \rightarrow (0,0,0)} \phi_\alpha k_1 + \phi_{n_1} k_2 + \phi_A k_3 = 0, \quad (6.12)$$

pois  $\phi_A$  é contínua em todo o domínio (inclusive para  $\alpha = 0$ ), e, portanto, limitada e, como já demonstrado,  $\phi_\alpha$  e  $\phi_{n_1}$  são contínuas para  $\alpha \neq 0$  e limitadas para  $\alpha$  tendendo a zero. Segue-se, então, que

$$\lim_{k \rightarrow (0,0,0)} \phi(x + k) = \phi(x), \quad (6.13)$$

o que prova que  $\phi(\alpha, n_1, A)$  também é contínua em  $\alpha = 0$ . ■

## 7 Referências bibliográficas

- Blanchard, O. (1999) *Macroeconomia : teoria e política econômica*. Campus.
- Bonomo, M., Carrasco, V., Moreira, H. (2003) Aprendizado evolucionário, inércia inflacionária e recessão em desinflações monetárias, *Revista Brasileira de Economia*, 57 (4), out.-dez.
- Darity, Jr., W. & Young, W. “IS-LM : an inquest”, *History of Political Economy*, vol. 27, no 1, spring, pp. 1 - 41.
- Clower, R. W., (1963/65). “The Keynesian counter-revolution : a theoretical appraisal ”, in : Clower, R. W. (1984) *Money and Markets*, Cambridge : Cambridge University Press, pp.34-58.
- Clower, R., e Howitt, P. (1997). “Foundations of economics”, in : D’Autune, A. e Cartelier, J. (orgs.) *Is Economics Becoming a Hard Science?* Cheltenham.
- Flasche, P., Reiner, F., e Semmler, W., (1997). *Dynamic Macroeconomics*. Cambridge : The MIT Press.
- Greenwald, B., e Stiglitz, J. (1993) “New and old keynesians”, *Journal of Economic Perspectives*, vol. 7, no 1, pp. 23-44.
- Hahn, F., e Solow, R. (1997) *A Critical Essay on Modern Macroeconomic Theory*, Cambridge : The MIT Press.
- Johnson, H. H. (1961) “The General Theory after twenty-five years,” *American Economic Review – papers and proceedings*, vol. LI, no 2, pp.1-17.
- Keynes, J. M. (1936) *The General Theory of Employment, Interest and Money*. London :Macmillan ; C.W. VII.
- Koopmans, T. C. (1957) *Three Essays on the State of Economic Science*, McGraw Hill.
- Leijonhufvud, A., (1968). *On Keynesian Economics and the Economics of Keynes*. New York : Osford University Press.
- Modigliani, F. (1944) “Liquidity preference and the theory of interest and money,” *Econometrica*, 12 (January 1944), pp. 45-88. Reimpresso em *The Collected Papers of Franco Modigliani*, vol. 1, pp. 23-88, Cambridge : The MIT Press.
- Patinkin, D. (1948) “Price flexibility and full employment”, *American Economic Review*, September, 38, pp. 543-64.
- Ponti, G. (2000) *Continuous-Time Selection Dynamics - Theory and Practice*, *Research in Economics*, 54, 187-214.
- Prado, E. F. S. (1999) Dilema dos prisioneiros e dinâmicas evolucionárias, *Estudos Econômicos*, 29 (2), abr.-jun., pp. 249-266.
- Prado, E. F. S. (2001) Dois modelos clássicos de economia monetária, *Economia Aplicada*, 5 (3), jul.-set. pp. 547-567.

- Prado, E. F. S., Kadota, D. K., Soromenho, J. E. C. (2003) Survival of technologies : an evolutionary game approach, *Economia Aplicada* 7 (2), jun.
- Silveira, J. J., (2001) Ciclos Goodwinianos e o Processo de Concorrência num Ambiente de Racionalidade Limitada. Tese de Doutorado, IPE - FEA - USP.
- Silveira, J. J. (2003) Ciclos clássicos num ambiente de racionalidade limitada, *Estudos Econômicos*, 33 (4), out.-dez., pp. 701-734.
- Silveira, J. J., Sanson, J. R. (2004) The Harris-Todaro labor allocation mechanism as an evolutionary game, in : *Latin American Meeting of the Econometric Society*, Santiago.
- Soromenho, J. E. C. (2003) Equilíbrio e Desemprego - um estudo sobre o pensamento keynesiano. Tese de Livre Docência, FEA - USP.
- Soromenho, J. E. C., Kadota, D. K., Prado, E. F. S. (2001) Scale and externalities in an evolutionary game model, *Estudos Econômicos*, 31 (3), jul- set., pp. 529-550.
- Tobin J. (1997) "An overview of the General Theory", in : Harcourt, G. C., e Riach, P. A., (eds.) A 'Second Edition' of the General Theory, vol. 2, pp. 3-27, London and New York : Routledge.
- Tobin, J. (1994) "Price flexibility and output stability", in : Semmler, W., *Business Cycles : theory and empirical methods*. Boston : Kluwer Academic Publisher.
- Tobin, J. (1993) "Price Flexibility and the Stability of Full-employment Equilibrium", in : Barkai, H, Fischer, S and Liviatan, N eds. *Monetary Theory and Thought : Essays in Honour of Don Patinkin*. London : Macmillan..
- Vega-Redondo, F. (1996) *Evolution, Games and Economic Behaviour*. Oxford : Oxford University Press.
- Weibull, J. W. (1995) *Evolutionary Game Theory*. Cambridge : MIT Press.